Dr. B. Gonggrijp

NIEUWE METHODEN

op het gebied der

Algebraische en Transcendente

Vergelijkingen

P. NOORDHOFF - GRONINGEN

NIEUWE METHODEN

OP HET GEBIED DER

ALGEBRAISCHE EN TRANSCENDENTE VERGELIJKINGEN

DOOR

Dr. B. GONGGRIJP.

P. NOORDHOFF. — 1917. — GRONINGEN.

VOORBERICHT.

Deze hoofdstukken, grootendeels herziene overdrukken van sommige mijner opstellen in buiten- en binnenlandsche tijdschriften (l'Eseignement Mathématique; Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; Astronomische Nachrichten; Wiskundig Tijdschrift; Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde), zijn bestemd voor hen, die Wiskundige acten trachten te behalen, — met name KI.

Bovendien voor de studenten in exacte Wetenschappen aan onze Universiteiten en aan de Delftsche Hoogeschool.

Ook aan onze Militaire Academie en aan de Landbouwschool te Wageningen, waar de Wiskunde naar verdienste wordt behartigd, kunnen zij wellicht menigeen van dienst zijn.

In het algemeen zullen zij, naar ik hoop, ieder, die de Mathesis met ambitie beoefent, belang kunnen inboezemen.

De titel dezer verzameling opstellen moge hier even nader worden toegelicht.

Wegens den reuzenarbeid, door groote genieën reeds gedurende eenige eeuwen in de Hoogere Algebra verricht, is het practisch ongeveer onmogelijk nog zuiver maagdelijk gebied te vinden of geheel nieuwe wegen aan te leggen, die nergens reeds gebaande paden zouden kruisen of volgen.

Onder „*Nieuwe Methoden*" wordt daarom de beoordeelaar verzocht te willen verstaan: nieuwe aanwendingen, wijzigingen en verbeteringen en ook nieuwe combinaties van methoden op het gebied der hoogere-machts-vergelijkingen.

Mijn werk is echter, — hetgeen naar ik hoop bij nader onderzoek zal blijken, — oorspronkelijk, — voor zoover dit eenigszins mogelijk is.

Hadden voor mij andere wiskundigen reeds eenig denkbeeld over sommige quaesties of methoden geopperd, dan is daarvan rekenschap afgelegd.

Ik hoop werkelijk hier en daar eenig nuttig nieuws te hebben gebracht.

De inhoud van dit werkje spreke verder voor zich zelf. Alleen meen ik hier, — ter voorkoming van een verkeerden indruk, — wel te moeten opmerken, dat de door mij gegeven ongewone, geheel elementaire afleiding eener implicite ontwikkeling niet aldus is behandeld wegens onbekendheid met desbetreffende hoogere theorieën, maar wel om deze quaestie en hare zeer nuttige toepassingen binnen het terrein der studie voor KI te brengen.

De met zorg geconstrueerde grafieken, die als Aanhangsel zijn toegevoegd, zijn behalve ter illustratie van de beschouwingen over de Kepler'sche Vergelijking ook bestemd voor het werkelijk in praktijk brengen der voorgestelde graphische benaderingsmèthoden.

Aan alle astronomische observatoria kunnen zij, naar ik vast vertrouw, goeden dienst bewijzen.

Dr. B. GONGGRIJP.

INHOUD.

I. OPLOSSING VAN HOOGERE-MACHTS-VERGELIJKINGEN DOOR MIDDEL VAN KETTINGBREUKEN.

Het *principe* dezer methode is reeds van Lagrange afkomstig en uiterst eenvoudig.

Zij x een reëele wortel van de vergelijking:

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + A_{n-1}x + A_n = 0.$$

Wij denken het aantal geheelen, a, van dezen wortel bepaald en stellen:

$$x = a + \frac{1}{x_1}.$$

In de nieuwe vergelijking, waarin de onbekende nu x_1 is, stellen wij verder:

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2},$$

waaruit volgt:

$$x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}} \text{ enz.}$$

a_1 is nu het aantal geheelen van x_1 in de nieuwe vergelijking.

Op deze wijze kan men voortgaan. Het is duidelijk, dat zoodoende x in een kettingbreuk ontwikkeld wordt.

Dit beginsel is zoo eenvoudig en de ontwikkeling van een te benaderen getal in een kettingbreuk heeft zulke voordeelen [1]), dat men zich met verbazing afvraagt hoe het komt, dat de methode geheel veronachtzaamd is en in de leerboeken over Hoogere Algebra alleen maar *genoemd* wordt, gewoonlijk met de opmerking, dat de z.g. „Horner'sche methode" de voorkeur verdient.

De verklaring van deze verwaarloozing moet geloof ik gezocht worden in het feit, dat Lagrange er niet in geslaagd is de noodige vereenvoudigingen aan de voor zijn methode vereischte bewerkingen aan te brengen. Daarentegen werd door invoering van den Horner'schen Algorithmus bij de Newton'sche methode deze laatste zoozeer verbeterd, dat zij de andere geheel in de schaduw

---

[1]) Men denke hierbij aan de zeer bijzondere eigenschap: Als $\frac{t}{n}$ een „naderende breuk" is van een kettingbreuk-ontwikkeling, waardoor een getal G wordt voorgesteld, dan verschilt $\frac{t}{n}$ minder dan $\frac{1}{n^2}$ van G. Tengevolge van deze eigenschap behoeft zulk een naderende breuk slechts een vrij bescheiden noemer te hebben om het getal G met groote nauwkeurigheid te kunnen voorstellen. Een beroemd voorbeeld is de benadering van Metius voor het getal π, nl. $\pi = {}^{355}/_{113}$.

stelde. Zwaar zal ook de omstandigheid gewogen hebben, dat door de oplossingsmethode van Newton spoedig elk volgend cijfer van den wortel zonder eenigen twijfel kon worden gevonden, terwijl bij die van Lagrange het bepalen van elk volgend wijzergetal van de kettingbreuk een afzonderlijk onderzoek *schijnt* te vereischen.

In de volgende bladzijden hoop ik aan te toonen, dat de methode van Lagrange zeer belangrijk vereenvoudigd kan worden o.a. door ook deze te combineeren met den Algorithmus van Horner; dat zij dan gerust naast die van Newton mag gesteld worden en dikwijls zelfs boven deze de voorkeur verdient.

Allereerst dient te worden aangetoond, dat men steeds op eenvoudige wijze de grootheden a, a_1, a_2 enz. kan vinden, *die bij een zelfden wortel behooren.*

Denken wij voorloopig alleen reëele wortels en de methode toegepast op den grootsten positieven wortel.

Wij stellen: $x = a + \frac{1}{x_1}$ of $x - a = \frac{1}{x_1}$.

Wij verminderen dus alle wortels eerst met a. De grootste wortel der oorspronkelijke vergelijking gaat dan over in een positieven wortel der nieuwe verg. met getallenwaarde *kleiner dan 1;* de overige wortels worden negatief. Vervangt men nu x door $\frac{1}{x_1}$, m. a. w. keert men nu de wortels om, dan ontstaat een verg., die slechts één positieven wortel zal hebben; zooals van zelf spreekt zal deze wortel dan grooter dan 1 zijn. Men kan dan onmiddellijk dezelfde bewerking herhalen.

De methode geldt echter voor elken positieven en ook voor elken negatieven wortel mits men bij enkele van de eerste transformaties eenige omzichtigheid aanwendt.

Nemen wij een concreet geval. Gesteld, een vergelijking heeft 3 positieve wortels, waarvan wij voorloopig aannemen, dat allen een verschillend aantal geheelen bezitten.

Zij nu a het aantal geheelen van den *kleinsten* wortel. Stellen wij eerst: $x = a + y$, of $x - a = y$, dan zal de resulteerende vergelijking in y nog drie positieve wortels hebben, maar een er van ligt tusschen 0 en 1 en de andere twee zijn grooter dan 1.

Keert men dan de worters om door de substitutie $y = \frac{1}{x_1}$, dan zal de vergelijking in x_1 nog slechts 1 wortel > 1 kunnen hebben;

de beide andere zijn dan < 1. Men is nu teruggekomen op het eerste geval.

Wanneer er twee wortels tusschen dezelfde twee geheele getallen gelegen zijn, zal men ze door de substitutie

$$x = a + \frac{1}{x_1}$$

en misschien zelfs door enkele volgende niet terstond kunnen scheiden, maar weldra zal deze scheiding toch moeten plaats vinden, — tenzij de twee gedachte wortels gelijk zijn. Ook in dit geval kan, zooals wij later zullen toelichten, de methode blijven dienst doen op geheel analoge wijze als die van Newton.

De bewerkingen, bij de boven aangegeven methode vereischt, schijnen op het eerste gezicht vrij omslachtig te zijn en door het telkens bepalen van het aantal geheelen van een wortel eenigermate op den tast verricht te moeten worden. Wij zullen nu echter de vereenvoudigingen bespreken.

Wij stellen eerst $x = a + y$ of $x - a = y$
en bepalen door den Algorithmus van Horner de coëfficienten der vergelijking in $x - a$.

Hierna zouden wij $y = \frac{1}{x_1}$ moeten stellen en de nieuwe vergelijking, gerangschikt naar x_1, moeten opschrijven.

Hiertoe is echter niets anders noodig dan de *volgorde der coëfficienten der vergelijking in* y *om te keeren*, m. a. w. *ze van rechts naar links te lezen.*

Daarna bepalen wij het aantal geheelen van x_1; zij dit a_1. (Over vereenvoudigingen, die hierbij optreden, spreken wij later).

Nu moet allereerst weer gesteld worden:

$$x_1 = a_1 + y_1 \quad \text{of} \quad x_1 - a_1 = y_1.$$

De wortels der vorige vergelijking, (waarvan de coëfficienten van rechts naar links gelezen worden), moeten nu met a_1 verminderd worden.

Men behoeft nu de coëfficienten daarvan in het geheel niet opnieuw op te schrijven; *men kan eenvoudig den Horner'schen Algorithmus nu van rechts naar links toepassen.*

Bij de achtereenvolgende stappen in de benadering past men dien Algorithmus nu steeds afwisselend van links naar rechts en van rechts naar links toe.

Beter dan lange uitweidingen zal een voorbeeld dit verduidelijken.

Voorbeeld. $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$.

Deze vergelijking heeft slechts één positieven wortel, die bij onderzoek tusschen 1 en 2 blijkt te liggen. Wij hebben dus op de gewone wijze de wortels der vergelijking met 1 te verminderen:

	1	1	— 2	— 1
(A)		1	2	0
		2	0	— 1
		1	3	
		3	3	
		1		
		4		

Nu zouden wij de wortels hebben om te keeren, zoodat wij verkregen:

1 — 3 — 4 — 1

(De teekens zijn nu ook omgekeerd).

Wij mogen nu van de wortels der vergelijking, welker coëfficienten door deze rij worden voorgesteld, zooveel aftrekken, dat de laatste coëfficienten nog juist zijn teeken behoudt, maar het tegenstelde teeken zou verkrijgen, als men een eenheid meer van de wortels ging afnemen [1])

Men ziet zeer gemakkelijk, dat 4 het grootste getal is, dat onder deze voorwaarden van de wortels kan worden afgetrokken.

We zullen dus de bewerking hebben:

1	— 3	— 4	— 1
	4	4	0
	1	0	— 1
	4	20	
	5	20	
	4		
	9		

Van de opnieuw te onderzoeken vergelijking zullen de coëfficienten dan zijn:

1 — 20 — 9 — 1

Nu is het onmiddellijk duidelijk, dat het voor het vinden van dit resultaat niet noodig geweest was de teekens van de rij

— 1 3 4 1

om te keeren. Men kan evengoed de wortels der vergelijking

[1]) Algemeener: zooveel aftrekken, dat de eenige variatie nog juist blijft bestaan, maar zou verdwijnen, als met een eenheid meer werd verminderd.

met negatieven eersten coëfficient met 4 verminderen en dus de volgende bewerking verrichten:

— 1	3	4	1
	— 4	— 4	0
	— 1	0	1
	— 4	— 20	
	— 5	— 20	
	— 4		
	— 9		

Men ziet nu juist de coëfficienten-rij

1 — 20 — 9 — 1

te voorschijn komen.

Welnu, daar dit zoo is, kunnen wij de tweede bewerking onmiddellijk aan de bewerking (A) laten aansluiten door den Algorithmus van Horner van rechts naar links toe te passen.

De twee bewerkingen geven dan te zamen het volgende tableau:

1	1	— 2	— 1
0	1	2	0
1	2	0	— 1
	1	3	
	3	3	
	1	— 4	
	4	— 1	
	— 4	— 4	
	0	— 5	
	— 20	— 4	
	— 20	— 9	

Op deze wijze gaat men steeds voort. De Algorithmus wordt steeds afwisselend van links naar rechts en dan weer van rechts naar links toegepast.

Een belangrijke questie is nu nog de bepaling van het aantal geheelen, waarmee telkens de wortels verminderd moeten worden. Wij zullen aantoonen, dat men zich hieromtrent *zeer gemakkelijk alle zekerheid* kan verschaffen.

In ons voorbeeld was er slechts één positieve wortel, nl. tusschen 1 en 2. Wij schreven daarna de vergelijking naar $(x - 1)$ op. Deze had dus één positieven wortel tusschen 0 en 1 en twee negatieve wortels, wier volstrekte waarde zeker > 1 was. Door ze om te keeren onstond de vergelijking met de coëfficienten-rij:

— 1 3 4 1,

die dus één positieven wortel had > 1 en 2 negatieve, welker volstrekte waarde noodzakelijk < 1 is.

Van deze vergelijking werden de wortels weer verminderd met het aantal geheelen van den positieven wortel, zoodat de resulteerende vergelijking weer twee negatieve wortels verkrijgt met volstrekte waarde > 1 [1]) en een positieven tusschen 0 en 1.

En ook deze vergelijking wordt weer omgekeerd, zoodat er weer een nieuwe vergelijking ontstaat met één positieven wortel > 1 en twee negatieve, wier getallen-waarde een breuk is tusschen -1 en 0.

Dit zal altijd zoo blijven.

Beschouwen wij nu, om bij ons voorbeeld te blijven, de rij:

$$1 \qquad -20 \qquad -9 \qquad 1,$$

dan weten wij, dat de algebraïsche som der wortels dezer vergelijking gelijk is aan $+20$.

Noemen wij den positieven wortel p en de volstrekte waarden der beide negatieve wortels n_1 en n_2, dan moet:

$$p - (n_1 + n_2) = 20 \quad \text{of} \quad p = 20 + n_1 + n_2.$$

Omdat n_1 en n_2 *beide kleiner* dan 1 zijn, zien wij dus, dat:

$$p < 20 + 2. \quad \text{Tevens is:} \quad p > 20.$$

Wij zien, dat het aantal geheelen van p minstens $= 20$ moet zijn, maar kleiner dan 22.

Men zal verder nog het volgende inzien:

Wanneer het te voren afgetrokken getal (dus het laatst-gevonden wijzergetal der te berekenen kettingbreuk) slechts 2 is, zullen n_1 en n_2 (ontstaan door omkeering van getallen > 2) elk $< {}^1/_2$, dus samen < 1 moeten zijn. In dat geval zouden wij hebben:

$$20 < p < 20 + 1$$

of in het algemeen:

$$-\frac{A_1}{A_0} < p < -\frac{A_1}{A_0} + 1,$$

wanneer A_0 en A_1 resp. de coëfficienten van de n^e en van de $n - 1^e$ macht der onbekende in de telkens afgeleide vergelijkingen voorstellen.

Als dus het voorafgaande wijzergetal > 2 is, bedraagt het aantal geheelen van p hoogstens dat van $-\frac{A_1}{A_0}$ of 1 meer; is dat

---

[1]) Want van een reeds negatief getal, hoewel in volstrekte waarde < 1, wordt een getal > 1 afgetrokken.

wijzergetal 2 of 1, dan *kan* daarbij nog één eenheid komen. In allen gevalle blijkt echter dit aantal geheelen met genoegzame zekerheid bepaald te zijn. In ons geval was het vorige wijzergetal reeds 4, zoodat het aantal geheelen van $p < 20 + 1/2$ moest zijn en dus onmiddellijk geheel bepaald was.

Bij vergelijkingen van hoogeren dan den 3den graad zouden wij bijv. moeten stellen:

$$p = -\frac{A_1}{A_0} + (n_1 + n_2 + n_3 + n_4).$$

Wanneer dan het voorafgaande wijzergetal > 4 of $= 4$ was, zou het aantal geheelen van $-\frac{A_1}{A_0}$ hoogstens met de eenheid vermeerderd moeten worden om dat van p te vinden; bij kleinere voorafgaande wijzergetallen zou men misschien 2 of 3 eenheden meer moeten nemen; in het algemeen zal men echter op het eerste gezicht terstond een juiste keus kunnen doen. Bovendien, heeft men misschien een eenheid misgetast, dan kan men zonder eenige moeite den Algorithmus nog even toepassen met $+ 1$ of $- 1$ al naarmate men het aantal geheelen van p te klein of te groot gerekend heeft. Men heeft zulk een tot op 1 eenheid foutieve schatting van een cijfer of decimaal ook wel bij de Newton'sche methode en zelfs bij de gewone deeling.

Hieronder hebben wij de nu voldoende duidelijk gemaakte methode op het gekozen voorbeeld toegepast. Wij meenen op de volgende voordeelen te mogen wijzen:

1°. Alle bewerkingen geschieden met geheele getallen; hierdoor wordt het overbodig om, — zooals bij de methode van Horner noodig is, — bij de vermenigvuldigingen en optellingen telkens 1, 2, 3 enz. cijfers (van links naar rechts) „uit te schieten".

2°. Deze bewerkingen kunnen in het algemeen tot veel kleinere getallen (nl. vermenigvuldigtallen) beperkt blijven.

3°. Wanneer er wel een groot wijzergetal optreedt, waardoor bewerkingen met grootere getallen zouden optreden, dan is de kettingbreuk ook bijna terstond met voldoende nauwkeurigheid bekend.

4°. Reeds van het begin af kan men in het algemeen met groote zekerheid het aantal geheelen bepalen, dat van de wortels der successievelijk optredende vergelijkingen moet worden afgetrokken; dit is bij de methode van Horner niet altijd het geval.

5°. De deeling, waardoor dit getal gevonden wordt, kan met veel eenvoudiger getallen verricht worden.

6°. Er komt *nooit* een 0 in de bewerking, een geval, waarin ook bij de methode van Horner afzonderlijk moet worden voorzien en dat daarbij aanleiding kan geven tot vergissingen.

7°. Teller en noemer der berekende breuk zullen betrekkelijk kleine getallen zijn; opdat zij nl. tot op 0,000001 nauwkeurig de waarde van den wortel zal voorstellen, behoeft de noemer *hoogstens* slechts uit 4 cijfers te bestaan.

Men controleere deze opmerkingen aan het geheel uitgewerkte voorbeeld hieronder. Als een soort contrôle, dat de bewerkingen in voldoend aantal zijn verricht, kan nog het feit dienen, dat na het bepalen van een *even* aantal wijzergetallen de beidė uiterste en ook de beide binnenste kolommen uit evenveel getallen moeten bestaan (dus even lang moeten zijn).

1	1	— 2	— 1
0	1	2	0
1	2	0	— 1
196	1	3	— 180
197	3	3	— 181
362	1	— 4	— 1878
559	4	— 1	— 2059
47320	— 4	— 4	— 462
47879	0	— 5	— 2521
	— 20	— 4	
	— 20	— 9	
	20	0	
	0	— 9	
	20	400	
	20	391	
	20	— 362	
	40	29	
	58	— 362	
	98	— 333	
	— 666	— 362	
	— 568	— 695	
	591	69	
	23	— 626	
	591	1842	
	614	1216	
	591	— 2059	

Wijzergetallen:
1, 4, 20, 2, 3, 1, 6, 10.

Zie volg. blz.

1205	— 843
— 843	— 2059
362	— 2902
— 2902	— 2059
— 2540	— 4961
3354	4884
814	— 77
3354	25008
4168	24931
3354	— 25210
7522	— 279
— 2790	— 25210
4732	— 25489
— 254890	— 25210
— 250158	— 50699

Zooals bekend is, bepaalt men uit boven gevonden wijzergetallen de naderende breuken van de kettingbreuk aldus:

Men schrijft voorop *altijd* $\frac{1}{0}$; daarna het eerste wijzergetal, gedeeld door de eenheid, dus $\frac{1}{1}$; dan vermenigvuldigt men teller en noemer dezer tweede breuk met het tweede wijzergetal en telt bij deze producten den vorigen teller en den vorigen noemer op. Dit geeft in ons voorbeeld $\frac{4 \times 1 + 1}{4 \times 1 + 0} = \frac{5}{4}$.

Vervolgens worden teller en noemer van deze breuk weer vermenigvuldigd met het volgende wijzergetal; beide uitkomsten worden weer met den vorigen teller of noemer vermeerderd. Bij ons voorbeeld vinden wij dan als volgende naderende breuk $\frac{20 \times 5 + 1}{20 \times 4 + 1} = \frac{101}{81}$. Op deze wijze gaat men steeds voort. De verdere naderende breuken zullen worden:

$$\frac{207}{166}, \frac{722}{579}, \frac{929}{745}, \frac{6296}{5049} \text{ en } \frac{63889}{51235}.$$

De laatste breuk moet reeds tot op minder dan $\frac{1}{25 \times 10^8}$ of 0,00000 00004 nauwkeurig zijn.

Zonder de geheele bewerking verder voort te zetten ziet men gemakkelijk, dat het volgende wijzergetal een 5 zal zijn. De hierbij behoorende naderende breuk zal zijn: $\frac{325741}{261224}$.

De volstrekte fout in deze laatste breuk moet $< \frac{1}{6 \times 10^{10}}$ zijn.

Zij geeft dus zeker in *tien decimalen* nauwkeurig den positieven wortel van onze vergelijking.

Evenals bij de methode van Horner kan men hier moeite uitsparen door het weglaten van overtollige cijfers. Heeft men nl. voor de coëfficiënten der resulteerende vergelijkingen reeds tamelijk groote waarden verkregen, dan kan men alle coëfficienten door 1000, 10000 enz. gedeeld denken en de decimalen weglaten; deze zullen op de grootte van de nog te volgen wijzergetallen geen invloed uitoefenen.

Bij het voorkomen van bijna gelijke wortels, zal elk wijzergetal slechts een *deel* kunnen zijn van $-\frac{A_1}{A_0}$. Bij twee bijna gelijke wortels zal men telkens in de nabijheid van de *helft* van dat bedrag moeten blijven, totdat plotseling de beide wortels der verkregen vergelijking zich laten scheiden; voor beide kan dan de methode afzonderlijk worden voortgezet.

Dit wordt toegelicht met onderstaand voorbeeld. Te voren zij nog opgemerkt, dat het voor ieder, die de Newton'sche methode meermalen heeft toegepast, duidelijk zal zijn, dat bij dit voortdurend omkeeren der vergelijkingen en het telkens met een aantal geheelen verminderen van de wortels *tegelijkertijd* de *bestaanbaarheid* der wortels *onderzocht* wordt en de *waarde* er van *berekend*.

Zij nu op te lossen de vergelijking:

$$6x^3 - 141x + 263 = 0.$$

De 2 teekenvariaties houden stand, wanneer men de wortels met 2 vermindert. De coëfficienten-rij wordt dan:

$$6 \qquad 36 \qquad -69 \qquad 29.$$

Als de wortels met 3 worden verminderd, gaan *beide* variaties echter verloren. Er *kunnen* dus *twee* wortels gelegen zijn tusschen 2 en 3. Deze twee wortels kunnen nu wortels van de nieuwe vergelijking worden, maar liggen daar dan tusschen 0 en 1. Wij keeren de wortels om en lezen de coëfficiënten van rechts naar links. De bedoelde kleine positieve wortels gaan dan over in andere, die weer positief zijn, maar nu > 1.

Wanneer nu ook deze omgekeerde waarden nog in elkaars nabijheid liggen, zal men uit $p = \frac{69}{29} + n$ zeker een te groote

waarde voor p vinden, als nu n de volstrekte waarde van den eenigen negatieven wortel voorstelt, die onze verg. hebben kan en ook zeker heeft.

Bij twee positieve wortels zal men hebben:

$$p_1 + p_2 = \frac{69}{29} + n \text{ en dus } p_1 + p_2 < \frac{69}{29} + 1/2,$$

want het vorige wijzergetal was een 2.

Wel volgt hieruit, dat het *kleinste* wijzergetal p_1 zeker $< \frac{83,5}{2 \times 29}$ zal zijn, dus $= 1$ zal moeten zijn.

Verminder nu de wortels met 1 (van rechts naar links!),

De nieuwe rij van coëfficienten wordt: (te lezen van rechts naar links!)

2 — 15 18 29 .

Er zijn nog 2 variaties aanwezig; deze zouden echter verloren gaan, als men met 2 verminderde (of wanneer men nog eens met 1 verminderde). Van *beide* wortels hebben wij nu de wijzergetallen 2, 1; *zij zijn nog niet gescheiden.*

Wij keeren de vergelijking om en lezen dus bovenstaande getallen weer van links naar rechts.

Voor het nieuwe wijzergetal hebben wij:

$$p_1 + p_2 < \frac{15}{2} + 1, \quad \text{('t vorig wijzergetal was } = 1)$$

$$\text{dus } p_1 < \frac{17}{4}.$$

Verminder nu de wortels met 4. Er komt:

2 9 — 6 — 11.

Er is 1 variatie verloren gegaan; de wortels zijn gescheiden en hunne bestaanbaarheid is aangetoond [1]).

Voor $p = 3$ zouden er nog 2 variaties geweest zijn. De kleinste wortel der laatste vergelijking heeft dus 3 tot aantal geheelen; voor den grootsten hebben wij:

$$p_2 < \frac{17}{2} - 3 \text{ of } p_2 < \frac{11}{2}.$$

---

[1]) Bij toepassing van de Newton-Hornersche methode zou men na bepaling der coëfficienten-rij 6 36 — 69 29
door *probeeren* moeten vinden, dat bij vermindering der wortels met 0,7 de *twee* variaties nog bleven bestaan, maar tot *één* gereduceerd werden, als de wortels met 0,8 werden verminderd. Men vindt dan nl.:

1⁰.	6	48,6	— 9,78	0,398	en
2⁰.	6	50,4	+ 0,12	— 0,088.	

Neem dan $p = 5$ (of verminder nog eens met 1). Er komt de rij:

2 15 18 — 6.

Voor $p = 6$ zou de laatste variatie weer verloren gaan.

Wij hebben nu voor den *grootsten* positieven wortel voorloopig de wijzergetallen: 2, 1, 5;
en als coëfficientenrij om den algorithmus voort te zetten (van rechts naar links):

2 15 18 — 6.

Voor den *kleinsten* positieven wortel vonden wij reeds als wijzergetallen: 2, 1, 3;
de coëfficienten, voor het voortzetten van den algorithmus benoodigd, vinden wij bijv. door de wortels van de vergelijking met de coëfficienten 2, 9, — 6 en — 11 weer te verminderen met — 1. Er komt dan:

2 3 — 18 2.

(Ook te lezen van rechts naar links).

De verdere bewerkingen verloopen geheel normaal.

A. Ontwikkeling van den grootsten positieven wortel

2	15	18	— 6
45	0	— 18	— 28
47	15	0	— 34
40	— 54	— 18	— 450
87	— 39	— 18	— 484
— 85	47	— 18	
2	8	— 36	
	47	8	
	55	— 28	
	47	55	
	102	27	
	— 82	— 68	
	20	— 41	
	— 218	— 68	
	— 198	— 109	
	174	— 68	
	— 24	— 177	
	174	— 48	
	150	— 225	
	174	300	
	324	75	
	— 409	— 484	
	— 85	— 409	
	— 893	— 484	
	— 978	— 893	
	950 enz.		

Wijzergetallen:
2, 1, 5, 3, 1, 2, 2, 1, **490.**

Na het optreden van het bijzonder fortuinlijke wijzergetal [1]) 490 kunnen wij de bewerking onmiddellijk staken.

Wij vinden de naderende breuken:

$$\frac{1}{0},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{17}{6},\ \frac{54}{19},\ \frac{71}{25},\ \frac{196}{69},\ \frac{463}{163},\ \frac{659}{232},\ \frac{323373}{113843}.$$

De laatste breuk geeft den grootsten wortel tot op één enkele eenheid van de 10[e] decimaal nauwkeurig:

$$x_1 = 2{,}84051\ 72035.$$

B. Ontwikkeling van den kleinsten positieven wortel.

2	3	— 18	2
— 104	— 16	16	27
— 102	— 13	— 2	29
— 220	112	16	208
— 322	99	14	237
— 5634	— 102	16	4985
— 5956	— 3	30	5222
— 2477	— 102	— 3	— 743
— 8433	— 105	27	4579
	— 102	— 105	
	— 207	— 78	
	152	116	
	— 55	38	
	616	116	
	561	154	
	— 644	116	
	— 83	270	
	— 644	— 166	
	— 727	104	
	— 644	— 1454	
	— 1371	— 1350	
	432	1422	
	— 939	72	
	8964	1422	

Wijzergetallen:
2, 1, 3, 8, 1, 4, 2, 6, 1, 1, 1, 6.

Zie volg. blz.

[1]) Het voordeel van het vinden van een zoo hoog wijzergetal springt hier duidelijk in het oog. Men losse vooral de gegeven vergelijking ook volgens de methode van Newton-Horner op en zal dan spoedig ontdekken, dat de bewerkingen daarbij veel meer gereken en zorg vereischen.

Als een uitkomst in 6 à 7 decimalen voldoende is kan elke gevonden waarde van x logarithmisch gecontroleerd worden, omdat steeds

$$x = \sqrt[3]{\frac{141 \times x - 263}{6}}$$ moet zijn.

8025	1494
— 5956	1422
2069	2916
— 5956	2069
— 3887	4985
— 5956	— 3887
— 9843	1098
6320	5222
— 2477	6320
11542	5222
— 9065	11542
— 8433	5222
— 17498	16764
— 8433	— 17498
— 25931	— 734
— 8433	— 25931
— 34364	— 26665

Uit deze wijzergetallen vindt men als naderende breuken:

$\frac{1}{0}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{91}{33}$, $\frac{102}{37}$, $\frac{499}{181}$, $\frac{1100}{399}$, $\frac{7099}{2575}$, $\frac{8199}{2974}$, $\frac{15298}{5549}$, $\frac{23497}{8523}$ en $\frac{156280}{56687}$.

Uit de laatste leiden wij af: $x_2 = 2,756893115$.

C. Den negatieven wortel bepalen wij door in de gegeven vergelijking de wortels tegengesteld te nemen. De bewerking verloopt geheel normaal:

— 6	0	141	263
— 181	— 30	— 150	— 45
— 187	— 30	— 9	218
50	— 30	— 300	104
— 137	— 60	— 309	322
— 505197	— 30	218	1170
— 505334	— 90	— 91	1492
— 98514	— 91	218	170455
— 603848	— 181	127	171947
	127	218	
	— 54	345	
	— 187	— 241	
	— 241	104	
	— 187	— 428	
	— 428	— 324	
	— 187	644	

Wijzergetallen:
5, 1, 1, 2, 15, 21, 1, 3, 4.

— 615	320
640	644
25	964
1928	644
1953	1608
— 2055	— 1530
— 102	78
— 2055	— 32355
— 2157	— 32277
— 2055	31332
— 4212	— 945
— 19845	31332
— 24057	30387
638127	31332
614070	61719
— 505334	108736
108736	170455
— 505334	— 396598
— 396598	— 226143
— 505334	515841
— 901932	289698
869094	515841
— 32838	805539
2416617	515841
2383779	1321380

Uit deze wijzergetallen volgen als naderende breuken:

$$\frac{1}{0},\ \frac{5}{1},\ \frac{6}{1},\ \frac{11}{2},\ \frac{28}{5},\ \frac{431}{77},\ \frac{9079}{1622},\ \frac{9510}{1699},\ \frac{37609}{6719},\ \frac{159946}{28575}.$$

De laatste breuk geeft: $x_3 = (—)\ 5{,}59741032$.

Contrôle.

$$x_1 = 2{,}84051\,720$$
$$x_2 = 2{,}75689\,312$$
$$x_3 = —\,5{,}59741\,032$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0{,}00000\,000$$

Tot nu toe hebben wij ondersteld, dat alle wortels der op te lossen vergelijking reëel waren. De methode kan echter zonder eenige wijziging toegepast worden voor de berekening van een reëelen wortel, wanneer de anderen allen of gedeeltelijk complex zijn. Ook dan blijft het wijzergetal bij benadering gelijk aan $-\frac{A_1}{A_0}$. Immers, wanneer men alle wortels eener vergelijking ver-

mindert met het aantal geheelen van den grootsten positieven wortel, zal deze laatste overgaan in een wortel, die nog positief is, maar een getallenwaarde heeft, die tusschen 0 en 1 ligt; de kleinere reëele wortels krijgen een volstrekte waarde, die grooter is; wanneer de complexe wortels een *geringen modulus* hebben, zullen zij overgaan in andere complexe wortels, wier moduli in hoofdzaak bepaald worden door het getal, dat er van wordt afgetrokken (en hetwelk minstens = 1 is, maar dikwijls veel grooter). Bij omkeering der wortels zal de positieve, die tusschen 0 en 1 ligt, overgaan in een wortel > 1; de andere reëele wortels in dergelijke met volstrekte waarde < 1 (soms zelfs met zeer geringe volstrekte waarde); ook de complexe wortels zullen overgaan in wortels van dezelfde soort, maar in het door ons gedachte geval toch weer moduli < 1 krijgen en dus evenals de andere, reëele, wortels weinig gewicht in de schaal leggen.

Zoo zal men, na omkeering, weer uit $-\frac{A_1}{A_0}$ het wijzergetal kunnen opmaken. Wanneer de complexe wortels een *grooten* modulus hebben, zal deze, nadat de wortels met een aantal geheelen zijn verminderd, belangrijk blijven, maar na *omkeering* weer een gering bedrag krijgen. Zoo komen wij dan weer op het 1e geval terug.

Beter dan uitvoerige beschouwingen zal weer een voorbeeld de bruikbaarheid der methode kunnen toelichten, ook bij aanwezigheid van complexe wortels. Wij kiezen tot voorbeeld de vergelijking:

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x + 5 = 0.$$

Zij heeft twee positieve wortels, waarvan de grootste tusschen 3 en 4 en de kleinste tusschen 0 en 1 blijkt te liggen; bovendien twee complexe wortels, die wij zullen berekenen, als de reëele gevonden zijn.

Berekening van den grootsten positieven wortel.

1	— 2	— 3	— 4	5
500	3	3	0	— 12
501	1	0	— 4	— 7
61872	3	12	36	— 428
62373	4	12	32	— 435
	3	21	— 35	
	7	33	— 3	
	3	— 15	— 35	

Zie volg. blz.

10	18	— 38	
90	— 190	— 35	
100	— 172	— 73	Wijzergetallen:
— 860	— 365	— 35	3, 5, 2, 12, 13.
— 760	— 537	— 108	
1002	484	— 106	
242	— 53	— 214	
1002	2488	4870	
1244	2435	4656	
1002	4492	— 5220	
2246	6927	— 564	
1002	— 6768	— 5220	
3248	159	— 5784	
1908	— 69408	— 5220	
5156	— 69249	— 11004	
— 830988	— 132048		
— 825832	— 201297		

Naderende breuken:

$$\frac{0}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{16}{5},\ \frac{35}{11},\ \frac{436}{137},\ \frac{5703}{1792};$$

de laatste geeft: $x_1 = 3{,}182478$.

Berekening van den kleinsten positieven wortel.

Omdat het aantal geheelen = 0 is [1]), kan de Algorithmus hier terstond aan de rechterhand beginnen.

1	— 2	— 3	— 4	5
— 4	— 2	1	5	44
— 3	— 4	— 2	1	49
— 52	4	6	5	164
— 55	0	4	6	213
— 10460	— 6	11	5	43236
— 10515	— 6	15	11	43449
— 1488844	— 6	— 12	5	
— 1499359	— 12	3	16	
	— 6	— 24	6	

Zie volg. blz.

[1]) Dat dit aantal geheelen = 0 is, blijkt onmiddellijk door het met één verminderen van de variaties, als de wortels met 1 verminderd worden:

1	— 2	— 3	— 4	5
	1	— 1	— 4	— 8
	— 1	— 4	— 8	— 3
	1	0	— 4	
	0	— 4	— 12	
	1	1		
	1	— 3		
	1			
	2			

— 18	— 21	22
— 6	— 36	— 42
— 24	— 57	— 20
— 28	29	49
— 52	— 28	29
50	78	49
— 2	50	78
— 110	127	49
— 112	177	127
— 110	— 224	49
— 222	— 47	176
— 110	— 444	— 94
— 332	— 491	82
— 110	— 664	— 982
— 442	— 1155	— 900
— 1650	825	1065
— 2092	— 330	165
29100	6150	1065
27008	5820	1230
— 31545	11475	1065
— 4537	17295	2295
— 31545	— 13611	1065
— 36082	3684	3360
— 31545	— 108246	11052
— 67627	— 104562	14412
— 31545	— 202881	— 313686
— 99172	— 307443	— 299274
— 1913520	34083	304143
— 2012692	— 273360	4869
13228068	2163084	304143
11215376	1889724	309012
	4292105	304143
	6181829	613155
		304143
		917298

Wijzergetallen:
0, 1, 2, 1, 2, 5, 3, 7, 7.

Benaderende breuken:

$$\frac{1}{0},\quad \frac{0}{1},\quad \frac{1}{1},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{8}{11},\quad \frac{43}{59},\quad \frac{137}{188},\quad \frac{1002}{1375},\quad \frac{7151}{9813}.$$

Uit de laatste volgt: $x_2 = 0{,}7287272$.

Nu blijkt $x_1 + x_2 = 3{,}911205$; $x_1 x_2 = 2{,}319158$.

Met behulp van de gegeven vergelijking vinden wij dan:

$$x_3 + x_4 = -1{,}911305; \quad x_3 x_4 = \frac{5}{2{,}319158} = 2{,}155955;$$

x_3 en x_4 zullen dus de wortels zijn van:

$$x^2 + 1{,}911305x + 2{,}155955 = 0.$$

Bij oplossing vindt men:
$x_3 = -0{,}955602 + 1{,}114800i$ en $x_4 = -0{,}955602 - 1{,}114800i$.

Er waren dus 2 complexe wortels, maar de oplossing der reëele wortels verloopt geheel normaal. Met behulp der gevonden wijzergetallen zou gemakkelijk nagegaan kunnen worden hoe de complexe wortels in den loop der bewerkingen telkens gewijzigd worden en welken invloed zij uitoefenen op de som van alle wortels en daardoor op de bepaling van het aantal geheelen, waarmee telkens verminderd moet worden [1]).

Als verdere toepassing van de methode ter berekening van een reëelen wortel bij aanwezigheid van eenige complexe zullen wij hier nog behandelen de *ontwikkeling* van den n^e-machtswortel uit een gegeven getal A in een *kettingbreuk*.

De berekening van $x = \sqrt[n]{A}$ kan nl. opgevat worden als de berekening van den (positieven of negatieven) reëelen wortel van de vergelijking $x^n - A = 0$. Op deze vergelijking passen wij weer afwisselend van links naar rechts en omgekeerd den Algorithmus toe [2]).

Voorbeeld. Gevraagd zij $\sqrt[3]{82}$.

1	0	0	— 82
72	4	16	64
73	4	16	— 18
405	4	32	1
478	8	48	— 17
— 297	4	— 36	— 1512
181	12	12	— 1529
	24	— 36	

Zie volg. blz

[1]) Wij behouden ons voor, over dezen invloed later in bijzonderheden te treden.

[2]) De gewone Newton-Hornersche methode zou hier geven:

1	0	0	— 82
	4	16	64
	4	16	— 18
	4	32	15,507
$x = 4,\ 3\ \ldots\ldots$	8	48	— 2,493
	4	3,69	
	12	51.69	
	0,3	3,78	
	12,3	55,47	
	0,3		
	12,6		
	0,3		
	12,9 enz. enz.		

36	— 24	
— 48	— 36	
— 12	— 60	
73	61	
61	1	
73	134	Wijzergetallen:
134	135	4, 2, 1, 9, 3, 3, 93.
73	— 153	
207	— 18	
— 162	— 153	
45	— 171	
— 1539	— 153	
— 1494	— 324	
1434	— 180	
— 60	— 504	
1434	4122	
1374	3618	
1434	— 4587	
2808	— 969	
— 2907	— 4587	
— 99	— 5556	
— 16668	— 4587	
— 16757	— 10143	

Naderende breuken:

$$\frac{1}{0};\ \frac{4}{1};\ \frac{9}{2};\ \frac{13}{3};\ \frac{126}{29};\ \frac{391}{90};\ \frac{1299}{299};\ \frac{121198}{27897}.$$

Uit de laatste naderende breuk kan men afleiden:

$\sqrt{82} = 4{,}34448149$ tot en met de laatste decimaal nauwkeurig. Bij *vierkantswortels* en in het algemeen bij de ontwikkeling van *wortels* van *vierkantsvergelijkingen* in kettingbreuken kan men dikwijls met een *zeer beperkt aantal bewerkingen* volstaan, omdat, zooals bekend is, de te vinden kettingbreuken periodiek (anders gezegd repeteerend) moeten zijn. Men staakt de bewerking zoodra een vroegere coëfficientenrij is teruggekomen (met dezelfde of met juist tegengestelde teekens).

Voorbeeld. Zij gevraagd $\sqrt{47}$ in een kettingbreuk te ontwikkelen.

Wij zullen de achtereenvolgende coëfficientenrijen naast de bewerking opschrijven totdat een vroegere rij terugkeert. Dan keeren de vroegere wijzergetallen ook weer terug.

1	0	— 47
1	6	36
2	6	— 11
— 1	6	0
1	12	— 11
	— 11	0
	1	— 11 ←
	— 11	
	— 10	
	10	
	0	
	10	
	10	
	— 11	
	— 1	
	— 11	
	— 12	
	12	
	0	
	12	
	12	

Coëfficienten-rijen			Wijzergetal, volgend op deze rij,
1	0	— 47	6
← — 11	12	1	1
2	— 10	— 11	5
— 11	10	2	1
1	— 12	— 11	12;
← — 11	12	1	1 enz.

De gevraagde wijzergetallen zijn: 6; 1, 5, 1, 12:

De kettingbreuk is gemengd-repeteerend; de periode der wijzergetallen is 1, 5, 1, 12.

Voorbeeld. Men vraagt de wortels van de vergelijking:

$$4x^2 - 22x + 21 = 0$$

in een kettingbreuk te ontwikkelen.

1°. Bewerking voor den grootsten wortel.

4	— 22	21
3	16	— 24
7	— 6	— 3
— 16	16	— 1
— 9	10	— 4
	— 9	
	1	
	— 9	
	— 8	
	7	
	— 1	
	7	
	6	
	— 8	
	— 2	
	— 8	
	— 10	

	Coëfficienten-rijen.			Wijzergetal; volgend op deze rij.
	4	— 22	21	4
(2)	— 3	10	4	3
	7	— 8	— 3	1
	— 4	6	7	2;
(5)	3	— 10	— 4	3 enz.

De coëfficienten-rij (5) is blijkbaar identiek met (2). De periode wordt 3, 1, 2.

De grootste wortel wordt dus voorgesteld door de gemengd-repeteerende kettingbreuk: 4; 3, 1, 2.

2⁰. Bewerking voor den kleinsten wortel.

				Coëfficienten-rijen.			Wijzergetal, volgend op deze rij.
4	— 22	21					
— 8	4	— 18					
— 4	— 18	3					
1	4	4					
— 3	— 14	7		4	— 22	21	1
	12	— 3					
	— 2	4		3	— 14	4	4
	12						
	10		(3)	— 4	10	3	2
	— 8						
	2			7	— 6	— 4	1
	— 8						
	— 6			— 3	8	7	3;
	7						
	1		(6)	4	— 10	— 3	2 enz.
	7						
	8						
	— 9						
	— 1						
	— 9						
	— 10						

De kleinste wortel kan dus worden voorgesteld door de gemengd-repeteerende kettingbreuk: 1, 4; 2, 1, 3.

Beide wortels hebben dezelfde getallen in hun periode; de volgorde der wijzergetallen is (hier) echter omgekeerd.

Als een laatste aanbeveling der methode zij hier vermeld, dat men door hare toepassing geleid kan worden tot het opsporen van *rationeele tweede-machts-deelers* van vormen van hoogeren graad.

Wanneer men nl. bij de berekening van zekeren wortel een rij wijzergetallen in dezelfde volgorde ziet terugkeeren, komt men tot het vermoeden, dat bij dezen wortel een repeteerende kettingbreuk behoort. Men kan dan gemakkelijk de *vierkantsvergelijking* afleiden, waarin deze wortel zou voorkomen. *Als* het eerste lid hiervan inderdaad een factor is van het eerste lid der gegeven vergelijking, heeft men meteen een tweeden wortel daarvan gevonden.

Voorbeeld. Zij gegeven de vergelijking:

$$2x^4 - 8x^3 - 9x^2 + 61x - 55 = 0.$$

Voor den grootsten positieven wortel vindt men hier de wijzergetallen: 3; 2, 1, 2, 1, 2 .....

De coëfficienten-rijen, waaruit deze volgen, mogen hier — ter contrôle — worden opgegeven:

2	— 8	— 9	61	— 55
— 7	7	27	16	2
86	— 16	— 99	— 49	— 7
— 85	49	369	328	86
1250	— 328	— 1377	— 631	— 85
— 1171	631	5139	4672	1250

Hoewel geen enkele vroegere coëfficientenrij terugkeert, komen wij toch uit het voortdurend terugkeeren van de periode 2, 1 in de wijzergetallen tot het vermoeden, dat de grootste wortel voorgesteld zal kunnen worden door de gemengd-periodieke kettingbreuk: 3; 2, 1.

De vierkants-vergelijking, waarin deze wortel zou voorkomen, kan worden gevonden door eliminatie van x_1 en x_2 uit onderstaande betrekkingen:

$$(1)\quad x = 3 + \frac{1}{x_1}, \qquad (2)\quad x_1 = 2 + \frac{1}{x_2}, \qquad (3)\quad x_2 = 1 + \frac{1}{x_1}.$$

Uit (3) volgt: $\frac{1}{x_2} = \frac{x_1}{x_1 + 1}$; (2) geeft dan: $x_1 - 2 = \frac{x_1}{x_1 + 1}$,

waaruit volgt: (4) ..... $x_1{}^2 - 2x_1 - 2 = 0.$

Uit (1) leiden wij dan af: $x_1 = \frac{1}{x - 3}.$

Door substitutie in (4) blijkt dan:

$$\frac{1}{(x-3)^2} - \frac{2}{x-3} - 2 = 0 \text{ of } 2x^2 - 10x + 11 = 0.$$

Onderzoekt men nu dezen deeler, dan vindt men terstond de ontbinding van het eerste lid onzer vergelijking in een product van rationeele tweede-machts-deelers:

$$2x^4 - 8x^3 - 9x^2 + 61x - 55 = (2x^2 - 10x + 11)(x^2 + x - 5).$$

II. ALGEMEENE BENADERINGSMETHODE VOOR DE REËELE EN COMPLEXE WORTELS VAN (NUMERIEKE) ALGEBRAÏSCHE EN TRANSCENDENTE VERGELIJKINGEN.

I. *Grondbeginsel en Geschiedenis.*

§ **1.** Om terstond met de deur in huis te vallen: het grondbeginsel van de hierna te behandelen methode is de *scheiding* van de wortels eener vergelijking door *machtsverheffing*.

Wanneer $\frac{w_2}{w_1} = k\,(k > 1)$, zal $\frac{w_2{}^p}{w_1{}^p} = k^p$.

In het algemeen zal reeds voor beperkte waarden van p de grootheid k^p elke willekeurig te stellen grens kunnen overschrijden, zoodat $w_2{}^p$ en $w_1{}^p$, al lagen w_2 en w_1 dicht bij elkaar, ver uiteen zullen liggen en zelfs van *verschillende grootte-orde* zullen zijn.

Wij zullen in het vervolg b van hoogere grootte-orde noemen dan a, wanneer binnen de eenmaal vastgestelde grenzen eener berekening (in 5 decimalen bijv.) *a ten opzichte van b kan verwaarloosd worden* $\left(\text{dus b.v. } \frac{a}{b} < \frac{1}{10^5}\right)$.

Wenscht men nu, dat $\frac{w_1{}^p}{w_2{}^p} < \frac{1}{10^5}$, dan moet dus $\frac{1}{k^p} < \frac{1}{10^5}$ of $k^p > 10^5$, dus $p > \frac{5}{\log k}$.

In onderstaand lijstje vindt men bij eenige waarden van k de vereischte waarden van p (naar boven afgerond) opgegeven.

$k =$ 1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$p =$ 121	64	44	35	29	25	22	20	18	17

Als w_1 en w_2 complexe getallen zijn, zal $\frac{\text{mod. } w_2}{\text{mod. } w_1} = k$ gesteld kunnen worden. Dan zal $\frac{\text{mod. } w_2{}^p}{\text{mod. } w_1{}^p} = \frac{(\text{mod. } w_2)^p}{(\text{mod. } w_1)^p} = k^p$.

De *modulus* van $w_1{}^p$ zal dan verdwijnend klein worden vergeleken met dien van $w_2{}^p$ en dus zal $w_1{}^p$ dan verwaarloosd kunnen worden t.o.v. van $w_2{}^p$.

§ **2.** Op bovenvermelde eenvoudige grondgedachte gelukte het mij de algemeene methode op te bouwen, die den titel van dit opstel vormt.

Terwijl ik hare ontwikkeling steeds verder zag voortschrijden en haar geldigheidsgebied steeds verder leerde uitstrekken, kwam het mij steeds onbegrijpelijker voor, dat eenzelfde gedachtengang nog nimmer te voren bij andere wiskundigen zich geopenbaard zou hebben. En werkelijk bleek mij bij onderzoek, dat de magische kracht der machtsverheffing reeds meermalen met goed gevolg in dienst gesteld was van de scheiding en benadering van de (reëele) wortels van vergelijkingen. Zelfs vond ik meer dan ik gehoopt had: niet alleen trof ik sporen van dezelfde grondgedachte aan bij Newton [1]), Daniël Bernouilli [2]) en Euler [3]), maar ontdekte ook in *Gräffe* den gelukkige, die als uitvinder der methode mag gelden, — ten minste voor zoover de *reëele* en *de moduli* van de complexe wortels van *algebraïsche* vergelijkingen betreft.

Hoewel Francœur [4]) als zijn voorganger genoemd moet worden, mag Gräffe's naam met recht verbonden blijven aan een methode, die geheel beantwoordt aan het ideaal van Lagrange, geformuleerd in diens „Mémoire sur la résolution des équations" van 1767:

„Etant donnée une équation numérique, sans aucune notion de la grandeur ni de la nature des racines, en trouver les valeurs numériques, exactes s'il est possible, ou aussi approchées qu'on voudra."

De methode heeft geen enkele voorbereiding noodig; de theorema's van Descartes, Rolle, Sturm enz. kunnen geheel buiten beschouwing blijven. De berekeningen, die zij vereischt, zijn beknopt en van zeer elementairen aard; zij kunnen door eerst-

---

[1]) Arithmetica Universalis T. II, Cap. IV: Sed ad radicem maximam propius accedes si quaeras summam quadrato-quadratorum et extrahas ejus radicem quadrato-quadraticam, et adhuc magis, si quaeras summam cubo-cuborum et extrahas ejus radicem cubo-cubicam. Et ita in infinitum.

[2]) Comm. Acad. Petrop III.

[3]) Introd. in Analysin Infinitesimorum, Lausannae 1748.

[4]) Cours Complet de Mathématiques, § 58, Paris 1809.

beginnende wiskundigen met gemak en haast werktuigelijk verricht worden. De *aard* der wortels (reëel of complex) komt in den loop der becijferingen *van zelf aan den dag.*

Gräffe zelf ging in zijne verhandeling, gepubliceerd in 1837 en in 1839 bekroond door de Berlijnsche Academie, niet verder dan de bepaling van de reëele en de *moduli* van de *complexe* wortels, in de onderstelling, dat deze grootheden onderling verschillend zijn. De methode vond spoedig een bewonderaar in den grooten astronoom Encke, die haar aanbeval en uitbreidde in een verhandeling, opgenomen in het Berliner Astr. Jahrbuch van 1841 en later op verzoek der redactie overgedrukt in Band XXII van Poggendorf's Annalen (p. 133, s.q.q.).

Hoewel door dezen herdruk voorkomen was, dat het Berliner Astr. Jahrbuch voor Encke's verhandeling het vergeetboek werd, vond de methode in Duitschland langen tijd niet de waardeering, die zij verdient. L. Matthiessen noemt haar alleen in het Litteraturverzeichniss van zijne „Grundzüge der litteralen Gleichungen"; in Weber's „Lehrbuch der Algebra" wordt zij vluchtig besproken, maar daarbij wordt alleen acht geslagen op de reëele wortels van algebraïsche vergelijkingen.

Een Spaansch astronoom, Miguel Merino, kreeg Encke's verhandeling bij toeval in handen en werd terstond een groot vereerder der methode. Zijn vrije vertaling van Encke's werk werd met vele wijzigingen en toevoegsels een boekdeel van 260 bladzijden (1879).

Na den Spanjaard Merino treedt de Franschman Carvallo als geestdriftig partijganger van Gräffe's theorie op. Hij maakt er zijn „thèse de doctorat" over, die hij later uitgeeft als: „Méthode pratique pour la résolution complète des équations algébriques ou transcendantes" (1896). In zijn historisch overzicht spreekt hij in de volgende bewoordingen over het beginsel van de scheiding der wortels door machtsverheffing: „Ainsi grossies, les racines sont séparées et immédiatement mesurables, comme les objets fins et rapprochés sont séparés et rendus mesurables par le microscope." Iets verder zegt hij: „Gräffe trouve toutes les racines par une opération plusieurs fois répétée, comme le micrographe augmenterait le grossissement par une série de verres gradués."

Na in Spanje en Frankrijk bewonderaars gevonden te hebben komt de methode weer tot grootere waardeering in Duitschland:

C. Runge heeft haar in zijn „Praxis der Gleichungen" [1]) een belangrijke plaats ingeruimd.

Na bovengenoemde aanbevelingen zal nu een beknopte uiteenzetting der theorie, naar ik hoop, op genoegzame belangstelling kunnen rekenen.

II. *Het Hoofd-theorema.*

§ 3. Zij

$$z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \ldots + A_{n-1} z + A_n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

een gegeven vergelijking. Wij noemen de wortels, gerangschikt naar opklimmende *volstrekte* waarde of *modulus* z_1, z_2 enz. ... z_n.

Van (1) zullen wij overgaan op een nieuwe vergelijking, die de p^e machten van de wortels van (1) tot wortels heeft.

Dit geschiedt door te stellen:

$$z = \sqrt[p]{y} \text{ of } z^p = y.$$

Wij zullen later [2]) bijzonderheden geven over de uitvoering dezer substitutie, maar merken terstond op, dat de resulteerende vergelijking in y van denzelfden graad zal zijn als de geg. verg. in z. Immers, blijkens $y = z^p$ (p = geheel getal) zal met elken wortel van (1) slechts één enkele wortel van de nieuwe vergelijking overeenstemmen, zoodat de laatste wortels in hetzelfde aantal aanwezig zullen zijn als de eerste [3]).

De resulteerende vergelijking moge voorgesteld worden door:

$$y^n + B_1 y^{n-1} + B_2 y^{n-2} + \ldots + B_{n-1} y + B_n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

en „eindvergelijking" genoemd worden.

Als p groot genoeg is, zal elk paar wortels van verschillende *grootte* of van verschillenden *modulus* van de verg. (1) overgaan in een tweetal van verschillende *orde* van (2), terwijl een *groep* wortels van *gelijke* grootte of modulus overgaat in een groep dergelijke wortels der eindvergelijking.

Allereerst zal nu worden bewezen het volgende:

---

1) Sammlung Schubert XIV 1900.

2) Zie § 5.

3) Bovendien kan men volgens de methode van Sylvester gemakkelijk de resultante in determinant-vorm voorstellen.

Theorema. Als y_{k+1} van hoogere (grootte-) orde is dan y_k, valt de eindvergelijking uiteen in:

$$y^n + B_1 y^{n-1} + \dots + B_{n-k} y^k = 0 \quad \dots \quad (3)$$

en $$B_{n-k} y^k + B_{n-k+1} y^{k-1} + \dots B_n = 0 \quad \dots \quad (4)$$

De eerste dezer verg. bevat (afgezien van k wortels $= 0$) de $n - k$ grootste wortels van (2), de tweede de k kleinste wortels [1]).

Bewijs. Als y_{k+1} van hoogere orde is dan y_k, is dit à fortiori het geval ten opzichte van $y_{k-1}, y_{k-2}, \dots y_1$.

Nu is:

$$-B_1 = y_n + y_{n-1} + \dots + y_{k+1} + [y_k + y_{k-1} + \dots + y_1];$$
$$B_2 = y_n y_{n-1} + \dots + y_{k+2} y_{k+1} + [\qquad];$$
$$-B_3 = y_n y_{n-1} y_{n-2} + \dots + y_{k+3} y_{k+2} y_{k+1} + [\qquad];$$

— — — — — — — — — — — — — —

$$(-1)^{n-k} B_{n-k} = y_n y_{n-1} \dots y_{k+1} + [\qquad].$$

Tusschen [ ] denke men telkens vereenigd de termen, die blijkens de praemisse van het theorema van lagere orde zijn. Doet men dit, dan blijken terstond $y_n, y_{n-1}, \dots y_{k+1}$ de wortels te zullen zijn van

$$y^{n-k} + B_1 y^{n-k-1} + B_2 y^{n-k-2} + \dots + B_{n-k} = 0 \text{ of van}$$
$$y^n + B_1 y^{n-1} + B_2 y^{n-2} + \dots + B_{n-k} y^k = 0.$$

Dat verder

$$B_{n-k} y^k + B_{n-k+1} y^{k-1} + \dots + B_n = 0$$

juist de wortels $y_k, y_{k-1}, \dots y_1$ bevat, kan bijvoorbeeld blijken door (2) op omgekeerde wortels te nemen.

Noemen wij $\frac{1}{y} = \eta$, dan ontstaat

$$B_n \eta^n + B_{n-1} \eta^{n-1} + \dots + B_1 \eta + 1 = 0.$$

Door de omkeering zijn nu $y_1, y_2, \dots y^k, y_{k+1}, \dots$ overgegaan in $\eta_n, \eta_{n-1}, \dots \eta_{n-k+1}, \eta_{n-k} \dots$

O.a. is $\eta_{n-k+1} = \frac{1}{y_k}$ en $\eta_{n-k} = \frac{1}{y_{k+1}}$.

Als vroeger $\frac{y_k}{y_{k+1}} = \delta$, zal nu $\frac{\eta_{n-k}}{\eta_{n-k+1}} = \delta$ en dus η_{n-k+1} van hoogere orde zijn dan η_{n-k}.

---

1) Een wortel zal hier steeds grooter heeten dan een andere, als zijn volstrekte waarde of zijn modulus dien van den anderen overtreft.

Volgens het reeds bewezen eerste deel van het theorema zal dan de vergelijking:

$$B_n \eta^n + B_{n-1} \eta^{n-1} + \dots + B_{n-k} \eta^{n-k} = 0$$

juist de wortels $\eta_n, \eta_{n-1}, \dots \eta_{n-k+1}$ bevatten.

Door nu weer om te keeren vindt men dat

$$B_{n-k} y^k + B_{n-k+1} y^{k-1} + \dots + B_n = 0$$

juist de wortels $y_1, y_2, \dots y_k$ bezit.

Hiermede is het gestelde in zijn geheel bewezen.

Opmerking. In het bewijs wordt alleen ondersteld, dat y_{k+1} van hoogere orde is dan y_k; onder $y_1, \dots y_k$ en $y_{k+1}, y_{k+2}, \dots y_n$ mag een willekeurig aantal groepen wortels van gelijken of *vergelijkbaren* modulus voorkomen.

§ **4.** Beschouwen we nu eens een groep van l wortels, volgende op y_k, dus $y_{k+1}, y_{k+2}, \dots y_{k+l}$.

Onderstellen wij y_{k+1} van *hoogere* orde dan y_k, maar y_{k+l} van *lagere* orde dan y_{k+l+1}.

Uit het theorema volgt dan:

1⁰. $B_{n-k-l} y^{k+l} + B_{n-k-l+1} y^{k+l-1} + \dots + B_n = 0$

heeft tot wortels:

$$y_{k+l}, y_{k+l-1}, \dots y_k, y_{k-1}, \dots y_1;$$

2⁰. $B_{n-k} y^k + B_{n-k+1} y^{k+1} + \dots + B_n = 0$

heeft de wortels:

$$y_k, y_{k-1}, \dots y_1;$$

3⁰. De l wortels $y_{k+1}, y_{k+2}, \dots y_{k+l}$

zullen juist bevat zijn in:

$$B_{n-k-l} y^{k+l} + B_{n-k-l+1} y^{k+l-1} + \dots + B_{n-k} y^k = 0.$$

Derhalve:

Voor een groep van l wortels, waaraan een wortel van lagere orde voorafgaat en waarop een wortel van hoogere orde volgt, kan dus een groep van $l + 1$ opeenvolgende termen uit de eind-vergelijking gelicht worden.

Door deze eigenschap kan men de wortels van *gelijken* modulus afzonderen. Zij is echter ook van groot nut in het geval, dat er in een vergelijking een beperkt aantal wortels van *weinig verschillenden* modulus voorkomt. Deze wortels zullen nl. slechts bij verheffing tot een macht met belangrijken exponent p tot ver-

schillende orden gebracht kunnen worden, terwijl dit voor de overige wortels wellicht reeds voor een zeer bescheiden waarde van p mogelijk zal zijn. Men kan zich met behulp van deze eigenschap dus dikwijls zeer beperken bij de keuze van den exponent p.

Het bovenstaande wordt toegelicht in voorbeeld III. Eerst dienen echter enkele bijzondere gevallen van het theorema te worden beschouwd en de middelen besproken te worden, waardoor de eindvergelijking op de eenvoudigste wijze wordt gevonden.

Hebben *alle* wortels verschillenden modulus, dan valt de eindvergelijking uiteen in:

$$y + B_1 = 0,\ B_1 y + B_2 = 0,\ B_2 y + B_3 = 0,\ \ldots.$$
$$B_{n-2} y + B_{n-1} = 0 \text{ en } B_{n-1} y + B_n = 0.$$

De kleinste wortel is dan $y_1 = -\dfrac{B_n}{B_{n-1}}$, de grootste $y_n = -B_1$; in het algemeen zal

$$y_k = -\frac{B_{n-k+1}}{B_{n-k}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Uit y_k zal dan volgen:

$$z_k = \sqrt[p]{-\frac{B_{n-k+1}}{B_{n-k}}}.$$

Hieruit vindt men dan onmiddellijk den *modulus* van z_k; het argument vereischt nader onderzoek. Immers, als het argument van y_k, afgeleid uit (5), $= \varphi$ is, zal dat van $z_k = \dfrac{\varphi}{p} + \dfrac{2m\pi}{p}$, als m een der waarden $0, 1, 2, \ldots. p-1$ voorstelt.

Het argument van z_k blijft dus voorloopig tot op eenige malen $\dfrac{2\pi}{p}$ onzeker.

De middelen ter nadere vaststelling van dit argument zullen later worden besproken.

Zijn alle wortels twee aan twee geconjugeerd-complex, (of gelijk), dan zullen y_n en y_{n-1} volgen uit:

$$y^2 + B_1 y + B_2 = 0;$$

verder y_{n-2} en y_{n-3} uit:

$$B_2 y^2 + B_3 y + B_4 = 0;$$

en zoo vervolgens;
de beide kleinste wortels y_1 en y_2 zullen bevat zijn in de verg.:

$$B_{n-2} y^2 + B_{n-1} y + B_n = 0.$$

Call No.

DUPLICATE

Author Gongrijp, B.
(Surname first)

Title Nieuwe Methoden op het gebied der algebraische en transcendente verglij-klingen.

Edition .... Place Groningen Publisher P. Noordhoff

Date 1917.; .... Vols. { List price / Est. price .... / Binding cost } Total est. cost ....

Recommended by .... Approved by ....

To be charged to .... fund

This card, if filled out by the department, will be returned to the person "recommending," or, if no one is specified, then to the one "approving" the book order.

III. *Bijzonderheden.*

§ 5. *Het uitvoeren der transformatie.*

Door te substitueeren $z = \sqrt{z^1}$ leide men uit (1) de vergelijking

$$z'^n + a_1 z'^{n-1} + a_2 z'^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z' + a_n = 0 \quad . \quad . \quad (6)$$

af, welker wortels de quadraten zijn van die der eerste. Deze vergelijking kan de „eerste getransformeerde" genoemd worden.

Daarna levert de substitutie $z' = \sqrt{z''}$ een tweede getransformeerde, die de 4e machten der wortels van (1) tot oplossingen heeft. Op deze wijze kan men steeds verder gaan. Na 5 transformaties is er reeds een vergelijking ontstaan met wortels, gelijk aan de 32e machten van die der oorspronkelijke vergelijking.

Reeds Gräffe heeft gewezen op de eenvoudige vormingswijze van (6) uit (1). Men kan de rationeele termen in het eerste lid vereenigen, alle termen, die een factor $\sqrt{z'}$ bevatten, in het tweede lid vereenigen, daarna beide leden quadrateeren en eindelijk de termen met gelijknamige machten van z' vereenigen.

Ik zou hier echter, — vooral met het oog op latere toepassing en uitbreiding, — de volgende afleiding willen voorslaan: [1])

Laat (1) voorgesteld worden door $F(z) = 0$.

De vergelijking $F(z) \times F(-z) = 0$ heeft behalve de wortels van $F(z) = 0$ nog evenveel andere, juist gelijk aan de tegengestelden van die van (1). Zij moet dus voorgesteld kunnen worden door $\varphi(z^2) = 0$.

Vervangt men nu z^2 door z', dan ontstaat $\varphi(z') = 0$ en deze vergelijking moet blijkbaar (6) opleveren.

Bij vermenigvuldiging van:

$$z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_{n-k} z^k + \ldots + A_{n-1} z + A_n = 0$$

met

$$(-1)^n z^n + (-1)^{n-1} A_1 z^{n-1} + \ldots + (-1)^k A_{n-k} z^k + \ldots + (-1) A_{n-1} z + A_n = 0$$

vindt men voor den *coëfficient van* z^{2k} vooreerst:

$(-1)^k A^2_{n-k}$, nl. uit het product der beide termen met z^k; daarna:

$(-1)^{k+1} A_{n-k-1} A_{n-k+1}$ uit $(-1)^{k+1} A_{n-k-1} z^{k+1} \times A_{n-k+1} z^{k-1}$; verder:

$(-1)^{k-1} A_{n-k+1} A_{n-k-1}$ uit $(-1)^{k-1} A_{n-k+1} z^{k-1} \times A_{n-k-1} z^{k+1}$.

De beide laatste termen kunnen vereenigd worden tot:

$$2 \times (-1)^{k-1} A_{n-k-1} A_{n-k+1}.$$

---

[1]) Het is mij gebleken, dat deze afleiding ook bij Runge te vinden is.

Men ziet nu terstond in, dat de coefficient van z^{2k} in $F(z) \times F(-z) = 0$, dus de coëfficient a_{n-k} van z'^k in (6) zal voorgesteld worden door: $(-1)^k A_{n-k}^2 + 2 \times (-1)^{k-1} A_{n-k-1} A_{n-k+1} + 2 \times (-1)^{k-2} A_{n-k-2} A_{n-k+2} + \ldots$ of door:

$$(-1)^k (A_{n-k}^2 - 2A_{n-k-1}A_{n-k+1} + 2A_{n-k-2}A_{n-k+2} - \ldots).$$

Opmerking. Als men in (6) z' vervangt door $-z'$, zal deze coëfficient juist worden:

$$(-1)^{2k}(A_{n-k}^2 - 2A_{n-k-1}A_{n-k+1} + 2A_{n-k-2}A_{n-k+2} - \ldots)$$

of

$$A_{n-k}^2 - 2A_{n-k-1}A_{n-k+1} + 2A_{n-k-2}A_{n-k+2} - \ldots -$$

Omdat door de machtsverheffing het teeken, en in het algemeen het argument van de wortels toch in zekeren zin onbepaald wordt, verdient het aanbeveling, in het vervolg onder de „eerste getransformeerde" te verstaan de vergelijking, die de *tegengestelden* van de quadraten der wortels van (1) tot oplossingen heeft. Voor de berekeningen van hare coëfficienten geldt dan de volgende:

Regel. Een willekeurige coëfficient van de eerste getransformeerde is gelijk aan het quadraat van den overeenkomstigen coëfficient der oorspronkelijke vergelijking, *min* het dubbele product der beide coëfficienten, die den eersten omsluiten, *plus* het dubbele product der coëfficienten, die de beide vorige insluiten enz. totdat men een der beide uiterste termen der gegeven vergelijking bereikt heeft.

De coëfficienten der verdere getransformeerden vindt men dan door steeds denzelfden regel op de coëfficienten der vorige getransformeerde toe te passen.

Men kan dezen regel gemakkelijk in een beknopten algebraïschen vorm brengen.

Bij
$$0 = \sum_{k=0}^{k=n} A_k u^k$$

behooren als coëfficienten der eerste getransformeerde:

$$a_k = \sum_{m=k-n}^{m=n-k} (-1)^m A_{k-m} A_{k+m}$$

(A's met negatieve indices = 0 te rekenen);

de coëfficienten der volgende getransformeerde zijn dan:

$$\alpha_k = \sum_{m=k-n}^{m=n-k} (-1)^m a_{k-m} a_{k+m} \text{ enz.}$$

§ **6.** *Het eindigen der transformaties.*

Vergelijking van de laatst gevonden getransformeerde met de voorlaatste wijst onmiddellijk uit of de eindvergelijking reeds gevonden is. Zij n.l.:

$$y^n + B_1 y^{n-1} + B_2 y^{n-2} + \dots + B_{n-1} y + B_n = 0$$

een eindvergelijking, waarbij y_{k+1} van hoogere orde is dan y_k, dan zal deze uiteenvallen in:

$$y^n + B_1 y^{n-1} + \dots + B_{n-k} y^k = 0 \text{ en}$$

$$B_{n-k} y^k + B_{n-k+1} y^{k-1} + \dots + B_n = 0.$$

Hierin is

$$(-1)^{n-k} B_{n-k} = y_n y_{n-1} \dots y_{k+1} + [\qquad].$$

Wordt deze eindvergelijking nog eens getransformeerd door $y = \sqrt{y'}$ tot

$$y'^n + C_1 y'^{n-1} + \dots + C_{n-1} y' + C_n = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

dan zal in (7) y'_{k+1} van hoogere orde zijn dan y'_k en (7) dus uiteengenomen kunnen worden in:

$$y'^n + C_1 y'^{n-1} + \dots + C_{n-k} y'^k = 0 \text{ en}$$

$$C_{n-k} y'^k + C_{n-k+1} y'^{k-1} + \dots + C_n = 0.$$

Nu is

$$(-1)^{n-k} C_{n-k} = y'_n y'_{n-1} \dots y'_{k+1} + [\qquad] \text{ of}$$

$$(-1)^{n-k} C_{n-k} = y_n^2 y_{n-1}^2 \dots y_{k+1}^2 + [\qquad].$$

Men ziet dus, dat

$$C_{n-k} = B_{n-k}^2 + [\qquad].$$

De eindvergelijking is dus gevonden; wanneer bij nog eenmaal voortgezette transformatie een zoo groot mogelijk aantal coëfficienten in hunne quadraten overgaan.

Zijn alle wortels ongelijk, dan gaan alle coëfficienten in hunne quadraten over; zijn ze twee aan twee gelijk of geconjugeerd, dan ondergaan de coëfficienten deze verandering juist om den anderen enz.

Met het oog op de overwegingen in § 4 kan men dikwijls in plaats van met een *zoo groot mogelijk aantal* volstaan met een *genoegzaam groot* aantal coëfficienten, dat bij nog eenmaal voortgezette transformatie gequadrateerd wordt.

Het aantal transformaties. Een groot voordeel der methode is, dat dit aantal in het algemeen *zeer* beperkt kan zijn. Na *vijf*

transformaties zijn alle wortels reeds tot de 2^5-macht, d.i. tot de 32^e-macht verheven; na 8 transformaties reeds tot de 256^e-macht enz.

Ter illustratie zullen eenige voorbeelden volgen. De rekening geschiedt in 5 decimalen; de (moduli van de) wortels zullen dan met ongeveer even groote nauwkeurigheid bekend worden.

Immers, al gaat bij de verheffing van de wortels tot een hooge (bijv. 64^e) macht door de weglating van decimalen de absolute nauwkeurigheid der coëfficienten verloren, *door de latere worteltrekking wordt de zoo ontstane fout* (*n.l. de relatieve fout*) *weer in dezelfde mate verkleind.*

Wanneer men bijvoorbeeld bij de berekening van

$$\left\{z_k\left(1+\frac{0{,}5}{10^5}\right)\right\}^{64} = z_k^{64}\left(1+\frac{32}{10^5}+\frac{64.63}{2!\times 4\times 10^{10}}+\ldots\right)$$

de termen, die na $\frac{32}{10^5}$ komen, weglaat, komt er:

$$z_k^{64}\left(1+\frac{32}{10^5}\right).$$

Trekt men hieruit weer den 64^e-machtswortel, dan vindt men terug:

$$z_k\sqrt[64]{\left(1+\frac{32}{10^5}\right)} = z_k\left(1+\frac{32}{10^5}\right)^{\frac{1}{64}} = z_k\left(1+\frac{1}{64}\times\frac{32}{10^5}-\frac{63}{2!\times 4\times 10^{10}}+\ldots\right) =$$

$$= z_k\left(1+\frac{0{,}5}{10^5}-\ldots\right).$$

De fout, ontstaan door de machtsverheffing, wordt dus te niet gedaan door de worteltrekking.

Het is verwonderlijk, dat nergens nadrukkelijk gewezen wordt op den gunstigen invloed van deze worteltrekking op de relatieve fout van de eind-uitkomst. Encke zegt zelfs met eenigen nadruk, dat men wegens de onnauwkeurigheden, aan de transformatie verbonden, nooit moet verwachten een gewenschte nauwkeurigheid te kunnen bereiken door de berekeningen in het daaraan beantwoordend aantal decimalen te verrichten. Één wenk schijnt mij echter behartigenswaard n.l. deze, dat men bij de eerste of de twee eerste transformaties in *sommige* gevallen met 7 decimalen moet rekenen, als men de einduitkomst in 5 decimalen nauwkeurig wil hebben. Door de aftrekkingen *kunnen* n.l. wel eens enkele decimalen verloren gaan, waardoor de verdere berekeningen

minder nauwkeurig zouden worden. Maar in het algemeen is deze voorzorg overbodig. Het uit het oog verliezen van den gunstigen invloed der finale worteltrekking is de oorzaak, dat Encke en ook Carvallo meermalen een uitkomst vinden met belangrijk grootere nauwkeurigheid „dan te verwachten was" [1]).

Dit laatste mag natuurlijk alleen bij uitzondering voorkomen, — als men n.l. bij het stellen van zijne verwachting werkelijk alle omstandigheden, die fouten kunnen veroorzaken, behoorlijk in rekening gebracht heeft.

Voorbeeld I:

$$z^4 - 2.1z^3 + 0.57z^2 + 0.194z - 0.042 = 0.$$

De coëfficienten der achtereenvolgende getransformeerden zijn:

1		3.27		1.0557		0.085516		0.001764
1	n.l.	0.93357	n.l.	— 0.25278	n.l.	— 2.44507	n.l.	— 5.05700
1	„	1.86050	„	— 0.60097	„	— 5.02683	„	— 11.01400
1	„	3.72096	„	— 1.21147	„	— 10.07819	„	— 22.02800
1	„	7.44192	„	— 2.42305	„	— 20.15710	„	— 44.05600
1	„	14.88384	„	— 4.84610	„	— 40.31420	„	— 88.11200

Aan de logarithmen ziet men terstond, dat de coëfficienten der laatste vergelijking allen gelijk zijn aan de quadraten van de overeenkomstige coëfficienten der voorlaatste. *Elk van beide* kan dus als eindvergelijking gelden. De laatste valt uiteen in 4 gedeeltelijke vergelijkingen, waaruit men vindt:

$$\text{log. mod. } z_1 = \frac{-88.11200 + 40.31420}{64} = 0.25316 - 1;$$

hieruit volgt mod. $z_1 = 0.17913$.

Verder blijkt

$$\text{mod. } z_2 = 0.27913; \text{ mod. } z_3 = 0.49172 \text{ en mod. } z_4 = 1.7083.$$

De moduli zijn alle verschillend; daar de coëfficienten der gegeven vergelijking alle reëel zijn, kunnen er geen complexe wortels zijn.

Door te letten op de som der wortels (+ 2,1) ziet men onmiddellijk, dat de *tweede* wortel negatief moet zijn; de andere zijn positief. Men heeft dus:

$$z_1 = 0.17913; \; z_2 = -0.27913; \; z_3 = 0.49172 \text{ en } z_4 = 1.7083.$$

---

1) Méthode pratique etc. p. 20:
„On le voit, le calcul se trouve plus précis que nous n'avions demandé" enz.

Contrôle. De vergelijking werd gevormd uit:

$$(z^2 + 0.1z - 0.05)(z^2 - 2.2z + 0.84) = 0.$$

Door oplossing van beide, hierin bevatte, vierkantsvergelijkingen kan men zich terstond overtuigen, dat de boven gevonden wortels allen *tot in de laatste decimaal* nauwkeurig zijn.

Voorbeeld II:

$$z^3 - 3z^2 - 2z - 2 = 0.$$

De transformaties worden hier voorgesteld door het volgende schema:

	z^3	z^2	z	
2^1	1	+ 13	— 8	+ 4
2^2	1	+ 185	— 40	16
2^3	1	n.l. 4.53536	— n.l. 3.63548	256
2^4	1	„ 9.07072	+ „ 6.04048	256^2 [1]).

Er is nu een *genoegzaam* groot aantal coëfficienten der laatste vergelijking gelijk aan het quadraat van een overeenkomstigen coëfficient der voorlaatste; de eindvergelijking is gevonden. Zij valt uiteen in:

$$y + \text{num. log. } 9.07072 = 0 \quad \text{en}$$

$$\text{num. log. } 9.07072 y^2 + \text{num. log. } 6.04048 y + 256^2 = 0 \; . \; . \; . \; . \; (8).$$

Deze laatste vergelijking heeft blijkbaar twee complexe wortels; de oorspronkelijke dus ook. Voor hun gemeenschappelijken modulus vind men:

$$\text{mod. } z_{1,2} = R_{1,2} = 0.73630.$$

Voor enkele lezers is misschien hier eenige toelichting gewenscht. Als de vierkantsvergelijking $az^2 + bz + c = 0$ twee complexe wortels $z_1 = p + qi$ en $z_2 = p - qi$ heeft, is hun gemeenschappelijke modulus $R_{1,2} = \sqrt{(p^2 + q^2)} = \sqrt{z_1 z_2} = \sqrt{\frac{c}{a}}$.

Daarom is in (8) $\text{mod. } y_{1,2} = \sqrt{\frac{256^2}{\text{num. log. } 9.07072}}$.

Hieruit volgt dan $\text{mod. } z_{1,2} = \sqrt[32]{\frac{256^2}{10^{9.07072}}}$,

dus $\log. \text{ mod. } z_{12} = \frac{2 \log. 256 - 9.07072}{32} = 0.86705 - 1$

en derhalve $R_{1,2} = \text{mod. } z_{1,2} = 0{,}73630$.

---

[1]) De machten van 2, die vooraan staan, geven aan tot welke macht de wortels der oorspr. verg. verheven zijn.

Verder zal y_3 = num. log. 9.07072 (afgezien van het teeken) en

dus $$z_3 = \sqrt[16]{\text{num. log. } 9.07072};$$

$$\log. z_3 = \frac{9.07072}{16} = 0{,}56692;$$

$$z_3 = 3.6891.$$

Met één blik op de gegeven vergelijking is het duidelijk, dat het teeken van z_3 positief zal zijn.

Het argument der beide complexe wortels zou *hier* kunnen volgen uit: $$2R_{1,2}\cos.\varphi + 3.6891 = 3 \text{ of } \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

$$R_{1,2}\cos.\varphi = -0.34455,$$

hetgeen oplevert:

$$\varphi_1 = 117°54'5'' \text{ en } \varphi_2 = 242°5'5''.$$

Toelichting. Als

$$z_{1,2} = p \pm qi = R_{1,2}(\cos.\varphi \pm i\sin.\varphi),$$

is $$z_1 + z_2 = 2R_{1,2}\cos.\varphi.$$

Verder moet $z_1 + z_2 + z_3 = 3$.

Hieruit volgt terstond (9).

Opmerking. De eerste twee transformaties zijn rechtstreeks met de coëfficienten berekend. De verdere berekeningen zijn verricht met gewone logarithmen in 5 decimalen. Men kan ook met voordeel *Gaussische* logarithmen gebruiken (o.a. Runge); bij berekeningen, die niet verder dan 3 decimalen behoeven te gaan, kan de rekenliniaal goede diensten bewijzen (Carvallo).

Voorbeeld III:

$$z^4 - 13.1z^3 + 433.4z^2 - 1264z + 960 = 0.$$

Deze vergelijking is ontstaan uit:

$$(z^2 - 3.1z + 2.4)(z^2 - 10z + 400) = 0.$$

Zij heeft daarom twee reëele wortels $z_1 = 1{,}5$ en $z_2 = 1{,}6$; bovendien twee complexe, waarvan $R_{3,4} = 20$.

Na 3 transformaties, — zoodat $z = \sqrt[8]{y}$, — zullen de waarden van 1.5^8 en 1.6^8 nog vrij dicht bij elkaar liggen, *maar beide reeds van lagere orde zijn dan de andere wortels* y_3 en y_4. Reeds na 3 transformaties moet men daarom de vergelijking in twee vierkantsvergelijkingen uiteen kunnen nemen. Dit blijkt aldus:

	z^4	z^3	z^2	z	
2^1	1	— 2.84210	5.19490	+ 5.88400	5.86454
2^2	1	+ 5.23063	10.40828	11.47337	11.92908
2^3	1	— 10.34793	20.81649	22.65264	23.85816

N.B. In plaats van de coëfficienten hebben wij hier overal hun logarithmen genomen, voorzien van het teeken, dat bij den coëfficient behoort; — 10.34793 beteekent dus — num. log. 10.34793 enz. De eindvergelijking valt uiteen in:

$$y^2 - 10.34793y + 20.81649 = 0 \qquad \text{en}$$
$$20.81649y^2 + 22.65264y + 23.85816 = 0.$$

De eerste hiervan heeft blijkbaar 2 complexe wortels. De discriminant is n.l. num. log. 20.69586 — 4 × num. log. 20.81649 = num. log. 20.69586 — num. log. 21.41855, dus negatief.

Men vindt:

$$R_{3,4} = \sqrt[16]{\text{num. log. } 20.81649}, \text{ waaruit}$$
$$\log. R_{3,4} = 1.30103 \text{ en dus } R_{3,4} = 20.0000.$$

De tweede vergelijking of

$y^2 + 1.83615y + 3.04167 = 0$ (nog steeds num. log.!) . . . . (10)

kan nu afzonderlijk verder behandeld worden.

Hier kan zij echter wegens haar lagen graad rechtstreeks worden opgelost. Men vindt:

$$y_1 = -25.6350; \quad y_2 = -42.9380.$$

Van deze teekens kan men nu afzien. Men vindt dan verder:

$$z_1 = \sqrt[8]{25.6350} = 1.50003 \text{ en}$$
$$z_2 = \sqrt[8]{42.9380} = 1.59994.$$

Door substitutie van $z_1 = 1.5$ en $z_2 = 1.6$ in de oorspronkelijke vergelijking overtuigt men zich gemakkelijk, dat het teeken van z_1 en z_2 positief is.

Wanneer men op (10) de transformatie verder voortzet, heeft men:

2^4	1	3.39808	6.08334
2^5	1	6.58330	12.16668
2^6	1	13.06967	24.33336
2^7	1	26.12555	48.66672
2^8	1	52.25089	97.33344

Men behoeft niet verder te gaan. Na de eerst-volgende transformatie zullen alle coëfficienten overgegaan zijn in hunne quadraten.

Men vindt nu $\log. z_1 = \dfrac{97.33344 - 52.25089}{256} = 0.17610;$

$$z_1 = 1.50003.$$

Verder $\log. z_2 = \dfrac{52.25089}{256} = 0.20410;$

$$z_2 = 1.59994.$$

Opmerking. Bij het quadrateeren van complexe wortels zullen hunne argumenten steeds verdubbeld worden en dus afwisselend in allerlei quadranten terecht kunnen komen. Op de aanwezigheid van (geconjugeerd) complexe wortels zal men dus vooral opmerkzaam worden gemaakt, wanneer zich bij sommige coëfficienten in den loop der bewerkingen teekenveranderingen voordoen. In de beide laatste voorbeelden valt dit gemakkelijk te controleeren.

IV. *Het argument der complexe wortels.*

§ 7. Encke leidt uit de eindvergelijking alleen den modulus R van zekeren wortel der oorspronkelijke vergelijking af. Het argument φ kan dan bepaald worden door substitutie van $R(\cos.\varphi + i\sin.\varphi)$ in de oorspronkelijke vergelijking. Uit deze volgen dan, ook bij complexe coëfficienten, twee vergelijkingen met φ als onbekende. Omdat $\cos. k\varphi$ en $\frac{\sin. k\varphi}{\sin. \varphi}$ geheel in machten van $\cos.\varphi$ kunnen worden uitgedrukt, zijn deze twee vergelijkingen als *algebraïsche* vergelijkingen in $\cos.\varphi$ op te vatten, wier coëfficienten bovendien reëel zijn.

De *grootste gemeene deeler* der eerste leden, gelijk nul gesteld, levert de waarden van $\cos.\varphi$, die bij den beschouwden modulus R behooren. Is deze modulus enkelvoudig, dan moet de G.G.D. van den 1en graad zijn. Bij aanwezigheid van eenige wortels met gelijken R, maar verschillend argument, is deze G.G.D. van hoogeren graad. Deze methode zal hier eenigszins nader worden toegelicht bij een algemeene vergelijking met reëele coëfficienten, vooreerst omdat men in de praktijk alleen met zoodanige te doen heeft en ten tweede omdat daarbij zeer belangrijke vereenvoudigingen optreden.

Stelt men in de vergelijking:

$$A_0 z^{2n} + A_1 z^{2n-1} + A_2 z^{2n-2} + \ldots + A_{2n-1} z + A_{2n} = 0$$

$$z = R(\cos.\varphi + i\sin.\varphi),$$

dan moeten de bij R behoorende waarden van φ tegelijkertijd voldoen aan:

$$A_0 R^{2n} \cos. 2n\varphi + A_1 R^{2n-1} \cos.(2n-1)\varphi + \ldots + A_{2n-1} R \cos.\varphi + A_{2n} = 0 \ldots (11)$$

en

$$A_0 R^{2n} \sin. 2n\varphi + A_1 R^{2n-1} \sin.(2n-1)\varphi + \ldots + A_{2n-1} R \sin.\varphi = 0 \ldots (12)$$

Nu zal cos. $n\varphi \times (11) +$ sin. $n\varphi \times (12)$ opleveren:

$$A_0R^{2n}\cos. n\varphi + A_1R^{2n-1}\cos.(n-1)\varphi + \ldots +$$
$$+ A_{2n-1}R\cos.(n-1)\varphi + A_{2n}\cos. n\varphi = 0 \quad \ldots (13)$$

Verder geeft — sin. $n\varphi \times (11) +$ cos. $n\varphi \times (12)$:

$$A_0R^{2n}\sin. n\varphi + A_1R^{2n-1}\sin.(n-1)\varphi - \ldots -$$
$$- A_{2n-1}R\sin.(n-1)\varphi - A_{2n}\sin. n\varphi = 0 \ldots (14)$$

In (13) en (14) kan men de symmetrisch ten opzichte van het midden geplaatste termen vereenigen.

Noemt men:

$$A_0R^{2n} + A_{2n} = B_0, \qquad A_0R^{2n} - A_{2n} = C_0,$$
$$A_1R^{2n-1} + A_{2n-1}R = B_1, \qquad A_1R^{2n-1} - A_{2n-1}R = C_1,$$
$$A_2R^{2n-2} + A_{2n-2}R^2 = B_2, \qquad A_2R^{2n-2} - A_{2n-2}R^2 = C_2,$$
$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \qquad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$
$$A_nR^n = B_n, \qquad A_{n-1}R^{n+1} - A_{n+1}R^{n-1} = C_{n-1},$$

dan gaan (13) en (14) over in:

$$B_0\cos. n\varphi + B_1\cos.(n-1)\varphi + \ldots + B_{n-1}\cos.\varphi + B_n = 0 \text{ en } \ldots (15)$$
$$C_0\sin. n\varphi + C_1\sin.(n-1)\varphi + \ldots + C_{n-1}\sin.\varphi = 0 \quad \ldots (16)$$

Om nu tot den enkelen hoek over te gaan heeft men de formules noodig:

$$\cos. n\varphi = 2^{n-1}\cos.^n\varphi - \frac{n}{1}2^{n-3}\cos.^{n-2}\varphi + \frac{n(n-3)}{1.\ 2}2^{n-5}\cos.^{n-4}\varphi -$$
$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3}2^{n-7}\cos.^{n-6}\varphi + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}2^{n-9}\cos.^{n-8}\varphi - \ldots (17)$$

en

$$\frac{\sin. n\varphi}{\sin.\varphi} = 2^{n-1}\cos.^{n-1}\varphi - \frac{n-2}{1}2^{n-3}\cos.^{n-3}\varphi +$$
$$+\frac{(n-3)(n-4)}{1.\ 2}2^{n-5}\cos.^{n-5}\varphi - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\ 2.\ 3}2^{n-7}\cos.^{n-7}\varphi +$$
$$+\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}2^{n-9}\cos.^{n-9}\varphi - \ldots (18)$$

De ontwikkelingen (17) en (18) moeten zoover worden voortgezet tot men op negatieve machten van cos. φ zou stuiten.

Uit (15), (16), (17) en (18), — in de beide laatste betrekkingen moet natuurlijk n achtereenvolgens door $n-1$, $n-2$ enz. vervangen worden, — kan men nu een resultaat afleiden van de gedaante:

$\beta_0 \cos.^n\varphi + \beta_1 \cos.^{n-1}\varphi + \beta_2 \cos.^{n-2}\varphi + \ldots + \beta_{n-1} \cos.\varphi + \beta_n = 0 \ldots\ldots (19)$

$\gamma_0 \cos.^{n-1}\varphi + \gamma_1 \cos.^{n-2}\varphi + \ldots + \gamma_{n-2} \cos.\varphi + \gamma_{n-1} = 0 \ldots\ldots (20)$

Bij een vergelijking van den $2n^{den}$ graad behooren dus twee argument-vergelijkingen respectievelijk van den n^{en} en den $n - 1^{en}$ graad. Voor eenige speciale waarden van $2n$ tot en met $2n = 8$ worden hieronder de noodige opgaven gedaan.

Bij vergelijkingen van *onevenen*, bijv. van den $2n - 1^{en}$ *graad*, blijven alle bovengenoemde herleidingen — mutatis mutandis — gelden. Men krijgt als resultaat weer twee vergelijkingen in cos. φ, die evenals (19) en (20) van den n^{en} en den $n - 1^{en}$ graad zijn. In plaats van dit gewijzigde resultaat afzonderlijk af te leiden verdient het de voorkeur, de vergelijking van den $2n - 1^{en}$ graad door vermenigvuldiging met z tot eene van den $2n^{en}$ graad herleid te denken.

§ 8. *Bijzondere gevallen.*

Bij een vergelijking van den *4en graad* heeft men de formules:

$$A_0R^4 + A_4 = B_0, \qquad A_0R^4 - A_4 = C_0,$$
$$A_1R^3 + A_3R = B_1, \qquad A_1R^3 - A_3R = C_1.$$
$$A_2R^2 = B_2,$$
$$2B_0 \cos.^2\varphi + B_1 \cos.\varphi - B_0 + B_2 = 0 \qquad \ldots\ldots (21)$$
$$2C_0 \cos.\varphi + C_1 = 0 \qquad \ldots\ldots (22)$$

De laatste betrekking is op zich zelf reeds voldoende.

Zij geeft:

$$\cos.\varphi = -\frac{C_1}{2C_0} = -\frac{A_1R^3 - A_3R}{2(A_0R^4 - A_n)} \qquad \ldots\ldots (23)$$

Hieruit volgt voor een verg. van den *3en graad:*

$$\cos.\varphi = -\frac{A_1R^2 - A_3}{2A_0R^3}. \qquad \ldots\ldots (24)$$

Met behulp van (24) vindt men bij het boven behandelde voorbeeld II:

$$\varphi = 117°54'3'',9 \text{ (of } \varphi = 242°5'56'',1).$$

Deze uitkomst verschilt 1″,1 met de vroeger gevondene; deze kan echter, omdat er toevallig voor $2R_{1,2} \cos.\varphi$ slechts 4 decimalen overbleven, wel tot op meer dan 1 sec. fout geweest zijn.

Bij een vergelijking van den 6en graad gelden de formules:

$$A_0R^6 + A_6 = B_0, \qquad A_0R^4 - A_6 = C_0,$$
$$A_1R^5 + A_5R = B_1, \qquad A_1R^5 - A_5R = C_1,$$
$$A_2R^4 + A_4R^2 = B_2, \qquad A_2R^4 - A_4R^2 = C_2.$$
$$A_3R^3 = B_3,$$

$$4B_0 \cos.^3\varphi + 2B_1 \cos.^2\varphi - (3B_0 - B_2)\cos.\varphi - B_1 + B_3 = 0; \quad \ldots . (25)$$

$$4C_0 \cos.^2\varphi + 2C_1 \cos.\varphi - C_0 + C_2 = 0. \quad \ldots . (26)$$

Bij die van den *8en graad* moet men aanwenden:

$$A_0R^8 + A_8 = B_0, \qquad A_0R^8 - A_8 = C_0,$$
$$A_1R^7 + A_7R = B_1, \qquad A_1R^7 - A_7R = C_1,$$
$$A_2R^6 + A_6R^2 = B_2, \qquad A_2R^6 - A_6R^2 = C_2,$$
$$A_3R^5 + A_5R^3 = B_3, \qquad A_3R^5 - A_5R^3 = C_3.$$
$$A_4R^4 = B_4,$$

$$8B_0 \cos.^4\varphi + 4B_1 \cos.^3\varphi - (8B_0 - 2B_2)\cos.^2\varphi -$$
$$-(3B_1 - B_3)\cos.\varphi + B_0 - B_2 + B_4 = 0 \quad \ldots .. (27)$$

$$8C_0 \cos.^3\varphi + 4C_1 \cos.^2\varphi - (4C_0 - 2C_2)\cos.\varphi - C_1 + C_3 = 0.$$

Voorbeeld IV. *Toepassing.*

$$x^6 - 9.6x^5 + 49.92x^4 - 150.128x^3 + 320.0528x^2 -$$
$$412.10176x + 314.987904 = 0$$ [1]).

Op deze verg., welke drie stellen geconjugeerd-complexe wortels bezit, — hetgeen bij onze behandeling van zelf aan den dag komt, — moge nu de volledige methode toegepast worden.

De (logarithmen van de) coëff. der 1ste getransformeerde zijn met behulp van 7-decimalige logarithmen bepaald en daarna weer bekort tot 5 decimalen. De geheele verdere rekening geschiedde in 5 decimalen.

	1	— 9.6	49.92	— 150.128	320.0528	— 412.10176	314.987904
2^1	1	— 0.88536	2.39734	— 3.32905	4.00630	— 4.50239	4.99659
2^2	1	— 2.64378	4.69768	— 5.35245	7.22575	— 9.00099	9.99318
2^3	1	+ 4.97399	9.36559	— 11.88141	14.91010	+ 17.82832	19.98636
2^4	1	+ 9.92635	18.74272	— 24.48679	30.32957	35.47129	39.97272
2^5	1	+ 18.83467	37.48580	— 49.15259	60.81168	70.67669	79.94544
2^6	1	— 37.16163	74.97160	— 98.28975	121.63715	141.04648	159.89088
2^7			149.94320	— 196.63616	243.27440	281.75134	319.78176

Na 7 transformaties is de eindvergelijking gevonden.

De 1e, 3e, 5e en 7e coëfficienten zullen bij een volgende transformatie allen in hunne quadraten overgaan. De 3e coëff. doet dit reeds na de 5e transformatie; daarna kan dan ook reeds een drie-termig deel uit de vergelijking gelicht worden. Voor de overige coëff. moet men nog enkele transformaties doen. De eindvergelijking valt dan uiteen in:

[1]) Dit voorbeeld wordt volgens een geheel andere methode behandeld door Dr. A. Kempe in Jaarg. XI van het Wiskundig Tijdschrift.

(1⁰) y^2 — n.l. $37.16163 \times y$ + n.l. $74.97160 = 0$;

(2⁰) n.l. $149.94320 \times y^2$ — n.l. $196.63616 \times y$ + n.l. $343.27440 = 0$;

(3⁰) n.l. $243.27440 \times y^2$ + n.l. $281.75134 \times y$ + n.l. $319.78176 = 0$.

Het verloop van den 2ᵉⁿ, 4ᵉⁿ en 6ᵉⁿ coëfficient gedurende de transformaties wijst duidelijk op den complexen aard van alle wortels. Door de eerste transformatie krijgt men trouwens reeds de *quadraten* van de wortels der oorspr. verg. Als deze dus reëele wortels had, zal de 1ᵉ getransformeerde daarvoor alleen *positieve* wortels krijgen. Deze worden dan alleen *tegengesteld* genomen, zoodat de 1ᵉ getransformeerde verg. alleen *negatieve* reëele wortels kan hebben en dus alleen factoren $y + y_1$, $y + y_2$ enz., als y_1 en y_2 positieve getallen voorstellen. Door de reëele wortels der oorspronkelijke vergelijking kunnen er dus alleen positieve teekens bij de coëfficienten optreden; negatieve teekens wijzen op complexe wortels. Ook het feit, dat sommige coëfficienten geen neiging vertoonen tot quadrateeren en zelfs plotseling van teeken veranderen, wijst op zulke wortels.

Maar *zekerheid* geeft hier de eindvergelijking.

In de gedeeltelijke eindvergelijkingen blijkt de discriminant terstond *negatief* te zijn.

Bij (1⁰) is $\log. p^2 = 2 \times 37.16163 = 74.32326$,

$$\log. 4q = \log. 4 + \log. q = 0.60206 + 74.97160 = 75.57366,$$

$$\text{dus } p^2 - 4q < 0.$$

Bij (2⁰) is $\log. b^2 = 2 \times 196.63616 = 393.27232$

$$\log. 4ac = \log. 4 + \log. a + \log. c = 393.81966,$$

$$\text{dus } b^2 - 4ac < 0.$$

Bij (3⁰) is $\log. b^2 = 563.50268$,

$$\log. 4ac = 563.65822,$$

$$\text{dus weer } b^2 - 4ac < 0.$$

De *modulus* van beide wortels van (1⁰) is gelijk aan den wortel uit hun product; de log. van dien modulus is dus $\frac{74.97160}{2}$. Omdat (1⁰) ontstaan is uit de oorspr. verg. door de wortels tot de 64ᵉ macht te verheffen (2^6), heeft men voor den modulus van twee wortels der oorspr. verg.

$$\log R_3 = \frac{74.97160}{128} = 0.58571\,{}_{56}.$$

Verder heeft men:

$$\log. R_2 = \frac{243.27440 - 149.94320}{256} = 0.36457\,{\scriptstyle 50};$$

$$\log. R_1 = \frac{319.78176 - 243.27440}{256} = 0.29885\,{\scriptstyle 69}.$$ [1])

Voor de berekening van het argument bij R heeft men hier:

$A_0R_3^6 = 3268.08$ $\quad$ $A_1R_3^5 = -8144.2$

$A_6 = 314.99$ $\quad$ $A_5R_3 = -1587.52$

$B_0 = 3583.07;\ C_0 = 2953.09.$ $\quad$ $B_1 = -9731.7;\ C_1 = -6556.7.$

$A_2R_3^4 = 10993.3$

$A_4R_3^2 = 4749.6$

$B_2 = 15742.9;\quad C_2 = 6243.7;\quad B_3 = A_3R_3^3 = -8582.4.$

Na deeling door den 1en coëff. ($4B_0$ en $4C_0$) krijgt men de argument-vergelijkingen:

$$\cos.^3 \varphi - 1.35800 \cos.^2 \varphi + 0.348417 \cos. \varphi + 0.080188 = 0$$

en

$$\cos.^2 \varphi - 1.11018 \cos. \varphi + 0.278573 = 0.$$

De rest der deeling van de laatste verg. op de voorlaatste, gelijk nul gesteld, geeft:

$$-0.205281 \cos. \varphi + 0.149225 = 0, \text{ waaruit:}$$

$$\cos. \varphi = \frac{0.149225}{0.205281};\ \log. \cos. \varphi = 9.86149;$$

$$\varphi = 43^0 22' 15''.$$

Uit $x_{5,6} = R_3 (\cos. \varphi \pm i \sin. \varphi) = R_3 \cos. \varphi \pm R_3 \sin. \varphi \times i$ volgt dan:

$$x_{5,6} = 2.8003 \pm 2.6454 i.$$

Bij R_2 krijgt men als argumentvergelijkingen:

$$\cos.^3 \varphi - 1.69792 \cos.^2 \varphi + 0.92896 \cos. \varphi - 0.144123 = 0$$

en

$$\cos.^2 \varphi - 0.97998 \cos. \varphi + 0.186848 = 0.$$

De G.G.D. der beide eerste leden, = 0 gesteld, geeft hier:

$$0.03855 \cos. \varphi - 0.009979 = 0;$$

$$\cos. \varphi = \frac{9979}{38550};\quad \log. \cos. \varphi = 9.41307 - 10;$$

$$\varphi = 74^\circ 59' 51''.$$

---

[1]) Met het oog op latere vermenigvuldigingen voor de berekening van R^6, R^5 enz. zijn hier met kleinere cijfers nog 2 decimalen na de 5 eerste genoteerd.

$x_{3,4} = R_2 (\cos.\varphi \pm i \sin.\varphi) = R_2 \cos.\varphi \pm R_2 \sin.\varphi \times i$ geeft dan:

$$x_{3,4} = 0.5993 \pm 2.2362 \times i.$$

De argumentvergelijkingen bij R_1 worden:

$$\cos.^3\varphi - 1.48463 \cos.^2\varphi + 0.60929 \cos.\varphi - 0.042065 = 0$$

en $$\cos.^2\varphi - 1.02907 \cos.\varphi + 0.229037 = 0.$$

De G.G.D. der beide eerste leden is hier:

$$-0.08855 \cos.\varphi + 0.062276.$$

Gelijk nul gesteld, levert zij:

$$\cos.\varphi = \frac{62276}{88550}; \quad \log.\cos.\varphi = 9.84709 - 10;$$

$$\varphi = 45°18'50''.$$

$x_{1.2} = R_1 (\cos.\varphi + i \sin.\varphi) = R_1 \cos.\varphi + R_1 \sin.\varphi \times i$ wordt nu:

$$x_{1,2} = 1.3994 \pm 1.4149 \times i.$$

Contrôle. De verg. werd gevormd uit de wortels:

$$x_{5,6} = 2.8 \pm i\sqrt{7} = 2.8 \pm 2.64575 \times i;$$
$$x_{3,4} = 0.6 \pm i\sqrt{5} = 0.6 \pm 2.23607 \times i;$$
$$x_{1,2} = 1.4 \pm i\sqrt{2} = 1.4 \pm 1.41421 \times i.$$ [1]

Hierbij zouden behooren:

$\log.R_3 = \log.\sqrt{(7.84 + 7)} = \log.\sqrt{14.84} = 0.58571^5$; (vroeger gevonden: 0.58571 56).

$\log.R_2 = \log.\sqrt{5.36} = 0.36458$; (vroeger gevonden: 0.36457 50).

$\log.R_1 = \log.\sqrt{3.96} = 0.29885$; (vroeger gevonden: 0.29885 69).

De waarden voor log. R gevonden waren dus tot ongeveer in de laatste decimaal juist; die voor de termen der complexe wortels verschillen reeds in de 4e decimaal van de werkelijke waarden. De oorzaak van deze afwijking is gelegen in de vrij uitvoerige berekening voor het argument, waarin ook hoogere machten van den berekenden modulus optreden en bovendien op het laatst door aftrekking nog een decimaal uitvalt. Bovendien wordt deze onnauwkeurigheid hier niet meer te niet gedaan door een worteltrekking met hoogen exponent zooals bij de berekening van den modulus. Om dus het argument en dan de termen van de complexe wortels eveneens in 5 decimalen nauwkeurig te vinden zal men de berekening voor het argument in bijv. 7 decimalen moeten doen.

---

[1]) De gevonden benaderingen wijzen duidelijk op de waarschijnlijkheid van de zeer bijzondere reëele waarden 2.8, 0.6 en 1.4. Door onderzoek vindt men dan verder gemakkelijk de imaginaire termen $i\sqrt{7}$, $i\sqrt{5}$ en $i\sqrt{2}$; ons onderzoek beoogt echter niet de nasporing van zulke bijzondere gevallen.

§ 9. *Andere bepaling van het argument der complexe wortels.*

Zij φ_k het argument van y_k in de eindvergelijking. Denken wij, dat de wortels der achtereenvolgende getransformeerden *niet* tegengesteld genomen zijn, dan zal het argument van dien wortel der voorlaatste getransformeerde, die met y_k overeenkomt, geweest zijn:

$$\frac{\varphi_k}{2} \text{ of } \frac{\varphi_k}{2} + \pi.$$

Uit de verdubbeling van beide waarden ontstaat n.l. als argument (tusschen 0 en 2π) φ_k.

Een substitutie, *met slechts zeer ruwe berekening*, wijst terstond uit welke van beide waarden bij die voorlaatste getransformeerde behooren. Men kan op dezelfde wijze langs de achtereenvolgende getransformeerden teruggaan naar de oorspronkelijke vergelijking. De substituties kunnen geheel in reëele grootheden uitgevoerd worden; bij vergelijkingen met reëele coëfficienten met behulp van (11) of (12).

Heeft men in de berekeningen de wortels der getransformeerden *wel* tegengesteld genomen, dan kan men gemakkelijk tot het hierboven gedachte geval terugkeeren door aan de coëfficienten der getransformeerden eerst om den anderen het tegengestelde teeken te geven.

Men kan echter ook het tegengestelde nemen van de wortels als een vermeerdering of vermindering van het argument met π opvatten. Men kan dus het geheele systeem der getransformeerden onveranderd laten, als men in de achtereenvolgende vergelijkingen voor het argument substitueert:

$$\frac{\varphi_k}{2} + \frac{\pi}{2} \text{ of } \frac{\varphi_k}{2} - \frac{\pi}{2}.$$

Worden in het voeger behandelde voorbeeld II de opeenvolgende moduli (van de eindvergelijking afgerekend) R_4, R_3, R_2, R_1 en R_z genoemd en de bijbehoorende φ's voorgesteld door φ_4, φ_3, φ_2, φ_1 en φ_z, dan zal $R_3 = \sqrt{R_4}$, $R_2 = \sqrt{R_3}$ enz. Men vindt dan achtereenvolgens:

$$\varphi_4 = 93°34'59'', \quad \varphi_3 = 43°12'30''.5, \varphi_2 = 68°23'44''.75,$$

$$\varphi_1 = 55°48'7''.6 \text{ en } \varphi_2 = 117°54'3''.8.$$

Carvallo, die zegt dat Encke „méconnaît l'idée féconde de l'inventeur," omdat hij „n'emprunte au calcul que la connaissance du module" leidt ook uit y_k door achtereenvolgende substituties het argument van z_k af. Hij denkt hiertoe, — evenals voor de

afleiding van den coëfficientenregel, — de gegeven vergelijking en de getransformeerden gebracht in den vorm:

$$\varphi(z^2) + z\Psi(z^2) = 0.$$

Substitueert men hierin voor z^2 de waarde van $-y_k$ uit de eindvergelijking, dan vindt men uit:

$$z = -\frac{\varphi(z^2)}{\Psi(z^2)}$$

(den modulus en) het argument van den aan y_k beantwoorden den wortel der voorlaatste getransformeerde; op dezelfde wijze kan men opklimmen tot de oorspronkelijke vergelijking.

Bij vergelijkingen van betrekkelijk lagen graad, waarbij een niet onbelangrijk aantal transformaties noodig was, levert echter Encke's methode eenvoudiger resultaten dan die door achtereenvolgende substituties.

Wanneer men de achtereenvolgende getransformeerden der boven behandelde 6e-machts-vergelijking onderzocht met de substitutie:

$$\varphi_{k-1} = \frac{\varphi_k}{2} \pm \frac{\pi}{2},$$

heeft men voor $x_{5,6}$ achtereenvolgens:

$$\varphi_6 = 76°17'20'', \quad \varphi_5 = 128°8'40'', \quad \varphi_4 = 154°4'20'', \quad \varphi_3 = 167°2'10'',$$
$$\varphi_2 = 6°28'55'', \; \varphi_1 = 93°14'27''.5, \; \varphi_x = 43°22'46''.$$

Hierbij vindt men dan:

$$R_3 \cos. \varphi = 2.79994 \text{ en } R_3 \sin. \varphi = 2.64588,$$

dus $$x_{5,6} = 2.79994 \pm 2.64588 \times i.$$

Deze oplossing stemt nauwkeuriger overeen met

$$x_{5,6} = 2.8 \pm i\sqrt{7} = 2.80000 \pm 2.64575 \times i$$

dan de vroeger gevondene.

Een oordeel, aan dit onderzoek door substitutie verbonden, is de omstandigheid, dat de achtereenvolgende φ's uit de vorige worden bepaald door telkens door 2 te deelen. De fout in het argument van y_k wordt dan ook telkens door 2 gedeeld.

In ons voorbeeld IV kan men zich bij deze substituties zeer beperken door op te merken, dat men voor φ_5, φ_4, φ_3, en φ_2 nauwkeurig genoeg handelt door alleen op de drie eerste coëfficienten te letten. Deze drie coëff. kunnen binnen de grenzen eener ruwe benadering gelden als de coëff. der vierkantsvergelijking, die x_1 en x_2 bevat.

Omdat de middelste coëff. dan $= -2R \cos. \varphi$ moet zijn, blijken φ_5, φ_4 en φ_3 in het 2de of 3de quadrant te moeten liggen; φ_2 zal weer in het eerste quadrant gelegen zijn. Voor φ_1 en φ_x moet men de substitutie inderdaad uitvoeren.

V. *De methode bij transcendente vergelijkingen.*

§ **10.** In de omgeving van een regulier punt $z = \alpha$ kan een functie $f(z)$ volgens het theorema van Taylor—Cauchy worden ontwikkeld naar opklimmende machten van $z - \alpha$.

Deze ontwikkeling heeft een beperkt gebied van geldigheid (holomorphie). Voor alle binnen dit gebied gelegen waarden van z moet de waarde van $f(z)$ met elken gewenschten graad van nauwkeurigheid kunnen worden gevonden uit de machtreeks:

$$\sum_{n=0}^{n=k} C_n(z - \alpha)^n,$$

wanneer men k slechts groot genoeg neemt. Omgekeerd, als men een binnen het geldigheidsgebied gelegen waarde van z gevonden heeft, waarvoor de machtreeks $= 0$ wordt, zal ook $f(z)$ met elken verlangden graad van nauwkeurigheid $= 0$ gemaakt kunnen worden. De nulpunten (wortels) van $f(z)$ kunnen dus met elke verlangde praecisie gevonden worden door oplossing van een hoogere-machts-vergelijking, — dus door de methode van de scheiding door machtsverheffing. Als α niet $= 0$ is, behoeft men slechts $z - \alpha$ door y te vervangen om te komen tot:

$$\sum_{n=0}^{n=k} C_n y^n = 0.$$

Voorbeeld V. $\qquad 1 + z \sin. z = 0.$

Laguerre heeft deze vergelijking besproken in de Comptes Rendus [1]). Hij komt door overweging van het feit, dat de ontwikkeling in het eerste lid aanvangt met $1 + z^2$ en dus een lacune vertoont tusschen twee termen met gelijk teeken, tot het vermoeden, dat de vergelijking imaginaire (complexe) wortels zal hebben. Dit vermoeden wordt dan tot zekerheid door onderzoek van het „geslacht" van $1 + z \sin. z$, dat $= 1$ blijkt te zijn.

Onze methode levert met zeer weinig moeite de waarde van de beide kleinste wortels, die zuiver imaginair blijken te zijn.

---

[1]) XCIV, 636.

Na ontwikkeling gaat $f(z) = 0$ over in:

$$0 = 1 + z^2 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \frac{z^8}{7!} + \ldots\ldots$$

Vervangen wij eerst z^2 door y; het transformatie-tableau wordt dan:

	1	1	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{5040}$
2^1	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{280}$	$\frac{1}{302400}$	$\frac{1}{5040^2}$
2^2	1	n.l. 0.24461	n.l. 6.09235—10		
2^3	1	n.l. 0.48919.			

In elke kolom is de transformatie zoo ver mogelijk voortgezet alvorens met de volgende kolom te beginnen.

Na drie transformaties is de eindtoestand reeds ingetreden voor den tweeden coëfficient. Wij vinden:

$$\text{mod. } z_{1,2} = \sqrt[16]{\text{num. log. } 0.48919} = 0.93202.$$

Het argument van y^8, (in de eindvergelijking) is π; op de vroeger aangegeven wijze wordt licht gevonden, dat voor y_1^4, y_1^2 en y_1 eveneens het argument $= \pi$ zal zijn.

Dat van $z_{1,2}$ in $1 + z \sin. z = 0$ zal dus $\pm\, ^1/_2\pi$ moeten zijn. Zoo blijkt dan:

$$z_{1,2} = \pm\, 0.93202i.$$

Contrôle. Bij substitutie dezer waarden in de gegeven vergelijking wordt het eerste lid $= 0.0000002$.

Voorbeeld VI: $z - e \sin. z - M = 0$.

Merken wij allereerst op, dat deze *Keplersche vergelijking* altijd een reëele oplossing zal hebben, gelegen tusschen M en $M + e$. Het eerste lid wordt voor deze waarden van z n.l. respectievelijk gelijk aan:

$$- e \sin. M \text{ en } e - e \sin. (M + e).$$

De eerste uitdrukking is negatief, de tweede positief [1]). De ontwikkeling van het eerste lid kan voorgesteld worden door:

$$z - e\left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} \cos. \theta z\right) - M = 0.$$

Wordt de term met z^5 verwaarloosd, dan zal er bij substitutie

[1]) Men mag n.l. aannemen $0 < M < \pi$.

der uit het resteerende deel der vergelijking voor z_0 berekende waarde een fout ontstaan *hoogstens* $= \frac{(M+e)^5 e}{120}$.

Zij nu $M = 27°31'5''.23$ of $= 0.4802818$ en
$\log. e = 9.3897262 - 10$ [1]);

$\frac{(M+e)^5 e}{120}$ is dan 0.0002 ongeveer.

$$M - (1-e)z - \frac{ez^3}{6} = 0$$

heeft dan bij deze waarden voor M en e het volgende transformatie-tableau:

1	—num.log.0.19626		—num.log.(8.93007—10)
1	0.39252	—(9.42736—10)	—(7.86014—10)
1	0.82158	9.03081—10	5.72028—10
1	1.64103	8.03903—10	
1	3.28205.		

Ook hier is elke kolom zoover mogelijk voortgezet alvorens met de volgende te beginnen.

Wij vinden nu:

$$z_1 = \sqrt[16]{\frac{1}{\text{num. log. } 3.28205}} = 0.62345.$$

In de hoekmaat is dit:

$$z_1 = 35°43'16''.$$

Contrôle. Volgens Oppolzer is $z = 35°43'30''.50$. Tot deze waarde zouden wij veel dichter genaderd zijn, als de term met z^5 nog in rekening genomen was. De fout bij *substitutie* zou dan *hoogstens* $= \frac{(M+e)^7 e}{5040}$ d.i. ongeveer 0.000005 bedragen.

Voor een eerste benadering, waarop men licht een bekende differentiaal-benadering kan laten volgen, is een nauwkeurigheid tot op minder dan 1 minuut echter meer dan voldoende.

In de omgeving van een m-voudige *pool* α kan een functie $f(z)$ nog steeds worden ontwikkeld in een machtreeks, maar deze zal dan ook *negatieve* machten van $z - \alpha$ bevatten en dus voorgesteld moeten worden door:

$$\sum_{n=-m}^{n=k} C_n (z-\alpha)^n.$$

1) Voorbeeld uit Oppolzer, Bahnbestimmung der Plan, und Kom. I, 56 met een kleine wijziging: M is naar het 1e quadrant overgebracht.

Het is echter gemakkelijk in te zien, dat ook hier de machtreeks in plaats van de functie genomen kan worden voor het onderzoek naar wortels binnen het gebied van convergentie (holomorphie), als slechts k groot genoeg genomen wordt. Door vermenigvuldiging met $(z - \alpha)^m$ en vervanging van $z - \alpha$ door y krijgt men weer een gewone hoogere-machts-vergelijking.

§ **11.** In de voorafgaande bladzijden zullen nu de voordeelen duidelijk genoeg geworden zijn van een methode, die door eenvoud en algemeenheid alle andere ver achter zich laat.

Er blijven nog wel enkele vragen ter beantwoording over, met name die naar de beste wijze van voortzetting eener eenmaal gevonden benadering. Als men een wortel bijv. tot in 10 decimalen nauwkeurig moet kennen, zou het een zeer tijdroovend werk zijn, alle berekeningen in dat aantal decimalen te verrichten. De bespreking van de beste wijze om zulke verfijnd-nauwkeurige resultaten te bereiken wordt bespaard voor een volgend hoofdstuk. Als uitkomst van dit onderzoek zij hier echter reeds medegedeeld, dat m.i. de eenvoudigstede eenvoudigste wijze om aan een eerste benadering z_0 van een wortel eener vergelijking $f(z) = 0$ een correctie van willekeurig vastgestelde nauwkeurigheid aan te brengen bestaat in de *ontwikkeling van dezen wortel z in de omgeving van z_0 als (implicite) functie van $f(z)$.*

III. VOORTZETTING DER BENADERING. UITBREIDING VAN DE METHODE VAN NEWTON.

De benaderingsmethode van Newton voor de oplossing eener hoogere-machts-vergelijking $f(x) = 0$ onderstelt, dat men een benadering x_0 voor zekeren wortel heeft gevonden, zoodat de werkelijke waarde kan voorgesteld worden door $x = x_0 + \triangle$, waarin $\triangle$ een kleine correctie voorstelt, die nog aan x_0 moet worden aangebracht.

Deze $\triangle$ is bepaald door de voorwaarde:

$$f(x_0 + \triangle) = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

welke door ontwikkeling van het eerste lid kan worden vervangen door:

$$f(x_0) + \triangle f'(x_0) + \triangle^2 \frac{f'' x_0}{1.2} + \ldots \triangle^{n-1} \frac{f^{[n-1]}_{(x_0)}}{(n-1)!} + a_0 \triangle^n = 0. \quad . \quad . \quad (2)$$

Voor de rigoureuse berekening van $\triangle$ zou dus eigenlijk weer de oplossing eener vergelijking van den n^{en} graad noodig zijn.

De omstandigheid, dat $\triangle$ als eene grootheid van gering bedrag gedacht wordt, kan echter groote vereenvoudiging opleveren.

Het is overbekend, dat Newton om een eerste correctie te vinden alle termen met hoogere machten van $\triangle$ dan de eerste verwaarloost, een benadering van $\triangle$ berekent uit:

$$\triangle_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

dan $x_0 + \triangle_0 = x_1$ als benaderde waarde voor x beschouwt en met x_1 dezelfde redeneering herhaalt, als eerst met x_0 gehouden is.

Even bekend is het, dat ook de voorwaarden, waaronder deze methode werkelijk tot het beoogde resultaat voert reeds door haren genialen ontdekker zijn in het licht gesteld. Door den Hornerschen Algorithmus is men verder in staat gesteld de voor deze methode benoodigde berekeningen zeer elegant en met groot gemak uit te voeren.

Het is zeer begrijpelijk, dat men bij deze methode liever enkele malen meer het formuletje

$$\triangle_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

toegepast, dan meerdere termen in de ontwikkeling (2) in rekening te brengen. Reeds door den term met $\triangle^2$ in acht te nemen zou de berekening in het algemeen zooveel meer werk vereischen, dat het voordeel eener grootere nauwkeurigheid van de eerstvolgende benadering daardoor in de schaduw gesteld werd. Het spreekt van zelf, dat het toevoegen van een term met $\triangle^3$ en termen met hoogere machten deze correctie tot groote complicaties zou voeren en weer de oplossing eener nieuwe hoogere-machts-vergelijking zou vereischen.

In deze eenvoudige overweging ligt naar allen schijn een geheel voldoende verklaring opgesloten van het feit, dat de z.g. Newton-Hornersche methode, werkende met het formuletje (3), stereotyp van de eene generatie op de andere is overgegaan.

Er zijn echter gevallen denkbaar, waarin het wenschelijk en door vereenvoudigende opmerkingen ook gemakkelijk uitvoerbaar is om meer termen der ontwikkeling (2) tot hun recht te doen komen.

Een eerste opmerking is de volgende.

In plaats van, evenals alle verdere termen, $\triangle^2 \frac{f''(x)}{1.2}$ geheel weg te laten zal grootere nauwkeurigheid bereikt moeten worden door in den derden term van (2) voor $\triangle$ te substitueeren de eerstgevonden benadering $\triangle_0$ en dus $\triangle$ te berekenen uit:

$$f(x_0) + \triangle f'(x_0) + \triangle_0^2 \frac{f''(x_0)}{1.2} = 0 \qquad \ldots \quad (4)$$

of uit: $$f(x_0) + \triangle f'(x_0) + \left\{\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right\}^2 \frac{f''(x)}{1.2} = 0$$ [1]).

In het eerste geval verwaarloosd men n.l. een term $\triangle^2 \frac{f''(x_0)}{1.2}$, in het tweede slechts:

$$(\triangle^2 - \triangle_0^2) \frac{f''(x_0)}{1.2},$$

of, als $\triangle_0$ dicht bij de werkelijke $\triangle$ ligt, zoodat $\triangle = \triangle_0 + \delta$,

[1]) Wij onderstellen voorloopig $\triangle$ van zulk een dimensie, dat van termen met $\triangle^3$ enz. kan worden afgezien; dit zal in het algemeen altijd kunnen geschieden, als $\triangle$ ongeveer $\frac{1}{1000}$ van het bedrag van x is.

slechts een grootheid, die met groote benadering wordt voorgesteld door:

$$2\delta \triangle \frac{f''(x_0)}{1.2} \text{ en dus van veel geringer bedrag is.}$$

Uit (4) leiden wij af:

$$\triangle' = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \left\{\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right\}^2 \frac{f''(x_0)}{1.2 f'(x_0)}. \quad \ldots\ldots (5)$$

Ieder, die de Newton-Hornersche methode slechts enkele malen heeft toegepast, zal terstond inzien, dat $\triangle'$ op eenvoudige wijze te berekenen is. De *gewone correctieterm* behoeft slechts *verminderd* te worden met zijn *quadraat*, *vermenigvuldigd* met het *quotient* van den *derden* en den *tweeden* term [1]).

Denken wij nu volgens de methode van Newton of Gräffe een eerste benadering gevonden tot op een of enkele duizendste deelen van haar bedrag nauwkeurig, dan zal in den regel het gewone formuletje $\triangle_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ *niet*, maar wel de nauwkeuriger correctie (5) den gezochten wortel kunnen opleveren met de gewone precisie in 7 decimalen.

Wij zullen hier voorloopig geen toepassing der correctie (5) geven en ook liever afzien van het beschouwen van verdere termen in het eerste lid van (2). Het zal n.l. uit de volgende bladzijden blijken, dat (5) kan afgeleid worden als een bijzonder geval van een zeer algemeene ontwikkeling der correctie, die gevonden wordt door *implicite differentiatie*, maar ook op elementaire wijze kan worden berekend.

Elementaire omkeering eener functie.

Ie *Voorbeeld.* Als gegeven is:

$$y = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots, \quad \ldots\ldots (6)$$

vraagt men omgekeerd x te „ontwikkelen” in y:

$$x = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \ldots \text{ [2]}).$$

Oplossing. Door 1 met zich zelf te vermenigvuldigen vindt men zeer gemakkelijk:

$$y^2 = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + \ldots \quad \ldots\ldots (7)$$

---

[1]) 2e term beteekent hier: laatste getal van de 2e kolom (van rechts) enz.

[2]) Aan $y = 0$ beantwoordt blijkens (1) altijd een waarde $x = 0$; men kan dus α wel weglaten.

Door de vermenigvuldiging van (2) met (1) uit te voeren blijkt dan:

$$y^3 = x^3 + (2+1)x^4 + (3+2+1)x^5 + (4+3+2+1)x^6 + \dots \quad \dots (8)$$

Men kan steeds hoogere machten van y op deze wijze in x uitdrukken. Tusschen (1), (2) en (3) kan men x^2 en x^3 elimineeren:

$$\begin{array}{rl} y = & x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \\ -y^2 = & \quad -x^2 - 2x^3 - 3x^4 - \dots \\ y^3 = & \qquad\qquad x^3 + (2+1)x^4 + \dots \\ + \hline y - y^2 + y^3 = & x \qquad\qquad + x^4 + \dots \end{array}$$

Wanneer x *een klein getal* is, zal bij *benadering*

$$x = y - y^2 + y^3.$$

De 4e en hoogere machten van x zullen dan zeer weinig gewicht in de schaal leggen.

Men kan de vermenigvuldiging met (1) steeds voortzetten en steeds verdere machten van x elimineeren. Men vindt dan steeds verdere termen van de ontwikkeling voor x. De volgende term wordt $-y^4$ enz. Wij hebben dus:

$$x = y - y^2 + y^3 - y^4 + \dots$$

Contrôle. Het is licht in te zien, dat $y = \frac{x}{1-x}$ (meetk. reeks!)

Hieruit volgt:

$$y - yx = x \text{ en dus } x = \frac{y}{1+y}.$$

Bij ontwikkeling (deeling) blijkt terstond:

$$x = y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 \dots$$

IIe *Voorbeeld.*

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \text{ (sinus reeks)} \quad \dots (9)$$

Nu is $y^3 = x^3\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots\right)^3 =$

$$= x^3\left\{1 - 3\left(\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + \dots\right) + 3\left(\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + \dots\right)^2 - (\ )^3\right\} =$$

$$= x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{3x^7}{5!} - \dots + \frac{3x^7}{(3!)^2} - \dots = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{13}{120}x^7 + \dots$$

$$y^5 = x^5\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \dots\right)^5 = x^5 - \frac{5x^7}{3!} + \dots$$

Nu kunnen x^3 en x^5 geëlimineerd worden:

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$+\frac{y^3}{3!} = \quad + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{2.3!} + \frac{13x^7}{720} + \dots$$

$$+\frac{3}{40}y^5 = \qquad - \frac{3x^5}{40} - \frac{1}{16}x^7 + \dots$$

$$+ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$y + \frac{y^3}{3!} + \frac{3}{40}y^5 = x - \frac{3^2.5^2}{7!}x^7 + \dots$$

Den factor van y^3 vindt men uit $-\frac{x^3}{3!}$.

De factor van y^5 wordt gevonden door $\frac{x^5}{5!}$ en $-\frac{x^5}{2.3!}$ samen te tellen.

Men ziet hier terstond in, dat ter eliminatie van x^7 weer vermeerderd zal moeten worden met $\frac{3^2 5^2}{7!}y^7 = \frac{5}{112}y^7$.

Als x klein genoeg is, zal dan zeer benaderd:

$$x = y + \frac{y^3}{6} + \frac{3}{40}y^5 + \frac{5}{112}y^7 + \dots \qquad \dots . (10)$$

Contrôle. Gegeven was: $y = \sin. x$; dus zal $x = \text{bg.} \sin. y$ moeten zijn. Nu is

$$\text{bg.} \sin. y = y + \frac{1}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{y^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{y^7}{7} + \dots$$

$$= y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{5}{112}y^7 + \dots$$

N.B. De ontwikkeling (10) geldt alleen voor beperkte waarden van y *zoowel als van* x. Dit wordt later toegelicht.

III. *Algemeen Voorbeeld.*

$$y = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n \qquad \dots . (11)$$

Wanneer gegeven was:

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n$$

zou men kunnen stellen:

$$y - A_0 = y' = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n$$

en x dus kunnen ontwikkelen naar opklimmende machten van y' of $y - A_0$. Deel beide leden van (11) door A_1:

$$\frac{y}{A_1} = x + \frac{A_2}{A_1}x^2 + \frac{A_3}{A_1}x^3 + \dots \qquad \dots . (12)$$

Door (12) met zich zelf te vermenigvuldigen krijgt men:

$$\left(\frac{y}{A_1}\right)^2 = x^2 + 2\frac{A_2}{A_1}x^3 + \frac{A_2{}^2 + 2A_1A_3}{A_1{}^2}x^4 + \dots \qquad \dots (13)$$

Uit (12) × (13) vindt men:

$$\left(\frac{y}{A_1}\right)^3 = x^3 + \frac{3A_2}{A_1}x^4 + \frac{3A_2{}^2 + 3A_1A_3}{A_1{}^2}x^5 + \ldots \ldots \quad (14)$$

De eliminatie van x^2 en x^3 gaat nu aldus:

$$\frac{y}{A_1} = x + \frac{A_2}{A_1}x^2 + \frac{A_3}{A_1}x^3 + \frac{A_4}{A_1}x^4 + \ldots.$$

$$-\frac{A_2}{A_1}\left(\frac{y}{A_1}\right)^2 = -\frac{A_2}{A_1}x^2 - \frac{2A_2{}^2}{A_1{}^2}x^3 - \frac{A_2{}^3 + 2A_1A_2A_3}{A_1{}^3}x^4 - \ldots.$$

$$\frac{2A_2{}^2 - A_1A_3}{A_1{}^2}\left(\frac{y}{A_1}\right)^3 = \frac{2A_2{}^2 - A_1A_3}{A_1{}^2}x^3 + \frac{6A_2{}^3 - 3A_1A_2A_3}{A_1{}^3}x^4 + \ldots.$$

$+$ ———————————————————————

$$\frac{y}{A_1} - \frac{A_2}{A_1}\left(\frac{y}{A_1}\right)^2 + \frac{2A_2{}^2 - A_1A_3}{A_1{}^2}\left(\frac{y}{A_1}\right)^3 = x + \varepsilon x^4 + \ldots.$$

Om ook x^4 te elimineeren blijkt uit bovenstaande sommatie, dat de factor van $\left(\frac{y}{A_1}\right)$ zal zijn:

$$-\frac{A_1{}^2A_4 - A_2{}^3 - 2A_1A_2A_3 + 6A_2{}^3 - 3A_1A_2A_3}{A_1{}^3} = -\frac{A_1{}^2A_4 - 5A_1A_2A_3 + 5A_2{}^3}{A_1{}^3}.$$

Wij hebben dus de ontwikkeling:

$$x = \frac{y}{A_1} - \frac{A_2}{A_1}\left(\frac{y}{A_1}\right)^2 + \frac{2A_2{}^2 - A_1A_3}{A_1{}^2}\left(\frac{y_1}{A_1}\right)^3 -$$

$$- \frac{A_1{}^2A_4 - 5A_1A_2A_3 + 5A_0{}^3}{A_1{}^3}\left(\frac{y_1}{A_1}\right)^4 \ldots. \quad \ldots. \quad (15)$$

Bovenstaande formule kan worden toegepast voor een *zeer nauwkeurige voortzetting der benadering* van een wortel eener algebraïsche of transcendente vergelijking.

De beide voorwaarden, waaronder (15) goede uitkomsten geeft, — n.l. x en $\frac{y}{A_1}$ beide van kleine volstrekte waarde, — worden tegelijkertijd vervuld door aan te nemen, dat men een eenigszins benaderende aanvangswaarde heeft bepaald [1]).

Zij bijv. ter oplossing gegeven:

$$0 = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots. + A_nx^n.$$

Zij verder x_0 een eerste benadering voor x, zoodat $x = x_0 + \triangle$ of $x - x_0 = \triangle$ gesteld kan worden.

---

[1]) Dit is juist de onderstelling, waarvan ook uitgegaan moet worden bij de gewone Newton'sche methode.

Verminder nu de wortels met x_0. Dit kan met behulp van den Horner'schen Algorithmus geschieden, er komt dan:

$$0 = B_0 + B_1 \triangle + B_2 \triangle^2 + \ldots + B_n \triangle^n \text{ of}$$

$$-\frac{B_0}{B_1} = \triangle + \frac{B_2}{B_1} \triangle^2 + \ldots + \frac{B_n}{B_1} \triangle^n. \quad \ldots . (16)$$

Het resultaat van de omkeering van bovenstaande functie kan onmiddellijk worden opgeschreven, door in (15) A te vervangen door B en y door $- B_0$. Dit geeft:

$$\triangle = -\frac{B_0}{B_1} - \frac{B_2}{B_1}\frac{B_0^2}{B_1^2} - \left(2\frac{B_2^2}{B_1^2} - \frac{B_3}{B_1}\right)\frac{B_0^3}{B_1^3} -$$
$$-\left(\frac{B_4}{B_1} - 5\frac{B_2}{B_1}\frac{B_3}{B_1} + 5\frac{B_2^3}{B_1^3}\right)\frac{B_0^4}{B_1^4} \text{ enz.} \quad \ldots . (17)$$

Als benaderingsformule kan dus gegeven worden:

$$x = x_0 - \frac{B_0}{B_1} - \frac{B_2}{B_1}\frac{B_0^2}{B_1^2} - \left(2\frac{B_2^2}{B_1^2} - \frac{B_3}{B_1}\right)\frac{B_0^3}{B_1^3} -$$
$$-\left(\frac{B_4}{B_1} - 5\frac{B_2}{B_1}\frac{B_3}{B_1} + 5\frac{B_2^3}{B_1^3}\right)\frac{B_0^4}{B_1^4} \text{ [1] enz.} \quad \ldots . (18)$$

Het is terstond duidelijk, dat de benaderingsformule van Newton:

$$x^1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \ldots\ldots (19)$$

een zeer bijzonder geval is van (17).

Immers

$$0 = F(x) = f(x_0 + \triangle) = f(x_0) + f'(x_0) \triangle +$$
$$+ \frac{f''(x_0)}{2!} \triangle^2 + \ldots + \frac{f^n(x)}{n!} \triangle^n, \quad \ldots . (20)$$

zoodat $\qquad f(x_0) = B_0$ en $f'(x_0) = B_1$, zoodat

$$x' = x_0 - \frac{B_0}{B_1}.$$

Vergelijking van (16) met (20) geeft ook onmiddellijk de gelegenheid om formule (18) in plaats van in de coëfficienten der herleide gegeven vergelijking uit te drukken in $f(x_0)$, $f'(x_0)$ en in de verdere afgeleiden van $f(x_0)$.

Eerst mogen echter enkele toepassingen van (18) hier plaats vinden.

---

[1] Uit deze ontwikkeling blijkt als voorwaarde, dat de volstrekte waarde van $\frac{B_0}{B_1}$ klein moet zijn; dit is juist dezelfde voorwaarde als bij de benaderingsmethode van Newton, want $B_0 = f(x_0)$ en $B_1 = f'(x_0)$.

I[e] Toepassing. Kiezen wij de vergelijking:

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

die door Lagrange is beschouwd in zijn Traité de la résolution des équations numériques, Chap. IV. Wij denken ons als gevonden benaderde waarde voor een der wortels $x_0 = -3{,}05$. De *volledige* Horner'sche Algorithmus voor dit geval kan dan door onmiddellijke vermenigvuldiging met het getal $-3{,}05$ in geheel (niet cijfer voor cijfer) aldus worden voorgesteld:

$+1$	0	-7	$+7$
	$-3{,}05$	$+9{,}3025$	$-7{,}022625$
	$-3{,}05$	$+2{,}3025$	$-0{,}022625 = B_0$
	$-3{,}05$	$+18{,}605$	
	$-6{,}10$	$+20{,}9075 = B_1$	
	$-3{,}05$		
	$-9{,}15 = B_2$.		

Nu is $-\dfrac{B_0}{B_1} = \dfrac{0{,}022625}{20{,}9075} = 0{,}001082148$

$$-\frac{B_2}{B_1}\frac{B_0^2}{B_1^2} = \frac{9{,}15}{20{,}9075} \times \frac{B_0^2}{B_1^2} = 0{,}00000\ 05125.$$

Uit de ontwikkeling (18) blijkt gemakkelijk, ($B_3 = 1$, $B_4 = 0$), dat geen verdere termen noodig zullen zijn, als x in *9 decimalen* nauwkeurig berekend moet worden.

Men vindt dan:

$$x = -3{,}05 + 0{,}00108\ 2660 = -3{,}04891\ 7340\ \ldots.$$

Opmerking. Een groot voordeel van deze methode is, dat de termen $-\dfrac{B_0}{B_1}$, $-\dfrac{B_2}{B_1}\dfrac{B_0^2}{B_1^2}$ enz. *logarithmisch berekend* kunnen worden.

Als in het behandelde voorbeeld een nog grooter aantal nauwkeurige decimalen verlangd werd, zou men de eerste correctie $-\dfrac{B_0}{B_1}$ ook door rechtstreeksche deeling kunnen berekenen.

II[e] Toepassing:

$$x^3 - 21x - 21 = 0.$$

Wij zullen deze vergelijking geheel volledig oplossen.

Zonder eenig verder onderzoek passen wij de methode van Gräffe toe:

	1	0	— 21	— 21
2	1	42	441	441
2^2	1	882	157437	194481
2^3	1	n.l. 5.66563	n.l. 10.38817	n.l. 10.57776
2^4	1	11.21888	20.77631 [1])	21.15552
2^5	1	22.41840	41.55262	42.31104
2^6	1	44.83635	83.10524	84.62208

$$\log. x_1' = \frac{84.62208 - 83.10524}{64} = 0.02370; \quad x_1' = 1.0561$$

$$\log. x_2' = \frac{83.10524 - 44.83635}{64} = 0.59795; \quad x_2' = 3.9623$$

$$\log. x_3' = \frac{44.83635}{64} = 0.70057; \quad x_3' = 5.0184.$$

De teekens van de wortels volgen onmiddellijk uit $x_1+x_2+x_3=0$; het blijkt, dat: $x_1 = -1.0561$; $x_2 = -3.9623$; $x_3 = 5.0184$.

De voortzetting der benadering *en tevens de herhaling der contrôle* geschiedt nu het eenvoudigst door den Algorithmus van Horner op de oorspronkelijke vergelijking toe te passen; men vermindert met de gevonden benaderingen, maar kort deze in tot 2 decimalen. De berekeningen zijn dan nog zeer eenvoudig; wie ze bezit, kan dan bovendien de tafels van Crelle toepassen, waarin de producten van alle getallen van 3 cijfers staan opgegeven. Men heeft dan:

a) Voortzetting der benadering van x_1:

1	0	— 21	— 21
	— 1.06	1.1236	21.068984
	— 1.06	— 19.8764	0.068984 = B_0.
	— 1.06	2.2472	
	— 2.12	— 17.6292 = B_1.	
	— 1.06		
	— 3.18 = B_2.		

Men vindt, logarithmisch:

$$-\frac{B_0}{B_1} = +0.003\ 9130\ 54;$$

$$-\frac{B_0^2 B_2}{B_1^3} = -0.000\ 0027\ 62;$$

$$x_1 = -1.06 - \frac{B_0}{B_1} - \frac{B_0^2 B_2}{B_1^3} = -1.056\ 0897\ 08.$$

[1]) Wanneer alleen de kleinste wortel verlangd werd, zou de bewerking hier gestaakt kunnen worden.

b) Voortzetting der benadering van x_2:

1	0	— 21	— 21
	— 3.96	+ 15.6816	+ 21.060864
	— 3.96	— 5.3184	+ 0.060864 = B_0
	— 3.96	+ 31.3632	
	— 7.92	26.0448 = B_1.	
	— 3.96		
	— 11.88 = B_2.		

$$-\frac{B_0}{B_1} = -0.002\ 3368\ 96;$$

$$-\frac{B_0^2 B_2}{B_1^3} = +0.000\ 0024\ 91;$$

$$x_2 = -3.96 - \frac{B_0}{B_1} - \frac{B_0^2 B_2}{B_1^3} = -3.962\ 3344\ 05.$$

c) Voortzetting der benadering van x_3:

1	0	— 21	— 21
	5.02	25.2004	21.086008
	5.02	4.2004	+ 0.086008 = B_0
	5.02	50.4008	
	10.04	54.6012 = B_1	
	5.02		
	15.06 = B_2.		

$$-\frac{B_0}{B_1} = -0.001\ 5532\ 41;$$

$$-\frac{B_0^2 B_1}{B_2^3} = -0.000\ 0006\ 65;$$

$$x_3 = 5.02 - \frac{B_0}{B_1} - \frac{B_0^2 B_1}{B_2^3} = 5.018\ 4460\ 94.$$

De nauwkeurigheid der gevonden uitkomsten blijkt uit het feit, dat weer $x_1 + x_2 + x_3 = 0.000\ 0000\ 00$.

Als resultaat der voorafgaande beschouwingen moge hier nu reeds opgegeven worden:

De aanbevelingswaardigste volledige oplossings-methode voor algebraïsche en transcendente vergelijkingen wordt gevormd door de combinatie van:

a) de methode van Gräffe voor de bepaling eener aanvankelijke benadering;

b) den algorithmus van Hörner voor de berekening der coëfficienten B_0, B_1, B_2 enz.;

c) de formule (18).

Omkeering van functies door implicite differentiatie.

Door in (18) B_0 te vervangen door $f(x_0)$, B_1 door $f'(x_0)$, B_2 door $\frac{f''(x_0)}{2!}$ en in het algemeen B_k door $\frac{f^{(k)}_{(x_0)}}{k!}$, gaat deze formule over in:

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f''}{2!f'} \cdot \frac{f^2}{f'^2} - \left\{ 2\frac{\left(\frac{f''}{2!}\right)^2}{f'^2} - \frac{\frac{f'''}{3!}}{f'} \right\} \frac{f^3}{f'^3} \cdot \cdot \cdot \cdot$$ [1]

of, eenigszins uitgewerkt:

$$x = x_0 - \frac{f_0}{f_0'} - \frac{f''}{2f'}\frac{f^2}{f'^2} - \left(\frac{f''^2}{2f'^2} - \frac{f'''}{6f'}\right)\frac{f^3}{f'^3} - \\ - \left(\frac{f^{IV}}{24f'} - 5\frac{f''f'''}{12f'^2} + 5\frac{f''^3}{8f'^3}\right)\frac{f^4}{f'^4} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

of

$$x = x_0 - \frac{f_0}{f'_0} - \frac{f''}{f'} \cdot \frac{f^2}{2!\,f'^2} - \left(\frac{3f''^2}{f'^2} - \frac{f'''}{f'}\right)\frac{f^3}{3!\,f'^3} - \\ - \left(\frac{f^{IV}}{f'} - 10\frac{f''f'''}{f'^2} + 15\frac{f''^3}{f'^3}\right)\frac{f^4}{4!\,f'^4} + \cdot \cdot \cdot \cdot \qquad \cdot \cdot \cdot \cdot \text{(21)}$$

Formule (21) geeft de (aanvangstermen der) omkeering van de functie $f(x) = 0$ in de (beperkte) omgeving van de benaderde oplossing x_0.

Deze formule, die geheel een differentiaal cachet heeft, kan met behulp der differentiaalrekening op gansch andere wijze worden afgeleid.

Alvorens deze methode te behandelen mag echter de beteekenis van de omkeering eener functie wel wat nader worden toegelicht.

Het 1e lid van de vergelijking:

$$x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0, \text{ of in het algemeen } f(x) = 0$$

is een *éénwaardige* functie van de grootheid x. Met elke willekeurige waarde van x stemt slechts één enkele waarde van het 1e lid overeen.

Omgekeerd kan x beschouwd worden als een functie van het 1e lid der vergelijking, maar dan als een *meerwaardige* (hier driewaardige) functie.

Wat dit beteekent blijkt eenvoudig uit het volgende onderzoek.

---

[1]) Bij f, f', f'' enz. moet men overal x_0 als argument denken.

Als aan het eerste lid niet de waarde 0, maar de waarde 1 wordt toegekend, voldoen aan $f(x)$ [1]) = 1 de *drie* wortels:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1 \text{ en } x_3 = -2.$$

Wij zullen nu de waarde van het 1e lid van 1 af langzaam laten afnemen en wel eerst van 1 tot 0.9.

Er ontstaat dan de vergelijking:

$$x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0.9 \text{ of } x^3 + 2x^2 - x - 1.9 = 0.$$

Hieraan voldoen dan:

$$x'_1 = 0.98\ldots, \quad x'_2 = -0.95\ldots \text{ en } x'_3 = -2.03\ldots$$

Tengevolge van de afneming van $f(x)$ met 0.1, neemt x_1 af met 0.02; x_2 neemt toe met 0.05 en x_3 weer af met 0.03.

Aan $f(x) = 0.8$ beantwoorden:

$$x''_1 = 0.97\ldots, \quad x''_2 = -0.90\ldots \text{ en } x''_3 = -2.06\ldots$$ [2]).

Bovenstaande uitkomsten zijn met nog enkele volgende in het onderstaande tafeltje vereenigd:

$f(x)$	x_1	x_2	x_3
1	1	— 1	— 2
0.9	0.98	— 0.95	— 2.03
0.8	0.97	— 0.90	— 2.06
0.6	0.93	— 0.81	— 2.12
0.4	0.89	— 0.73	— 2.16.

Hij blijkt duidelijk, dat aan eén vloeiende verandering van $f(x)$ *drie* vloeiend varieerende *functies* x_1, x_2 en x_3 beantwoorden.

Men kan het verloop dier functies x_1, x_2 en x_3 gemakkelijk graphisch voorstellen. Men neemt bijvoorbeeld de waarden 1, 0.9, 0.8 enz. van $f(x)$ als abscissen en eerst de daarbij behoorende waarden van x_1 als ordinaten. Het verloop van x_1 wordt dan graphisch door een (kromme) lijn voorgesteld.

Daarna wordt op dezelfde wijze x_2 en vervolgens x_3 behandeld.

De drie ontstane krommen worden dan *de takken* van de functie $x = \varphi(y)$ genoemd.

Elk dezer takken kan nu als (grafiek van) een gewone eenwaardige functie beschouwd worden.

Elk der wortels moet dus als een functie van f beschouwd en dan ook ontwikkeld *kunnen* worden.

---

[1]) n.l. aan $x^3 + 2x^2 - x - 1 = 1$ of $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.

[2]) Door de afkorting in 2 decimalen *kan* $x_1 + x_2 + x_3$ wel eens 0.01 van -2 afwijken.

Beschouwen wij nu eens de vergelijking:

$$f(x) = y. \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Fixeeren wij in (22) een bepaalde waarde voor y en onderstellen wij, dat x_0 *een waarde* voor x is, waarvoor $f(x)$ de waarde y_0 (dicht bij y gelegen) aanneemt. Nu zal $x = \varphi(y)$ *elk der takken* van de meerwaardige functie $\varphi(y)$ kunnen voorstellen. Wij kunnen nu stellen:

$$x = x_0 + \triangle_x \text{ en } y = y_0 + \triangle_y, \quad \text{terwijl } f(x_0) = y_0. \quad \ldots (23)$$

Dan zal

$$\varphi'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)};$$

$$\varphi''(y) = \frac{d}{dy}\frac{1}{f'} = \frac{d}{dx}\frac{1}{f'} \times \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{f''}{f'^2} \times \frac{1}{f'} = -\frac{f''}{f'^3};$$

$$\varphi'''(y) = \frac{d}{dy}\left(-\frac{f''}{f'^3}\right) = -\frac{d}{dx}\frac{f''}{f'^3} \times \frac{1}{f'} = -\frac{f'^3 f''' - 3f' f''^2}{f'^7} = \frac{3f''^2 - f' f'''}{f'^5};$$

$$\varphi^{IV}(y) = \frac{d}{dx}\frac{3f''^2 - f'f'''}{f'^5} \times \frac{1}{f'} = \frac{f'^5(6f''f''' - f'f^{IV} - f''f''') - (3f''^2 - f'f''')5f'^4 f''}{f'^{11}} =$$

$$= -\frac{f'^2 f^{IV} - 10f'f''f''' + 15f''^3}{f'^7} \text{ enz.}$$

Uit $x = \varphi(y) = \varphi(y_0 + \triangle_y)$ valt nu af te leiden:

$$x = \varphi(y_0) + \varphi'(y_0)\triangle_y + \varphi''(y_0)\frac{\triangle^2_y}{2!} + \varphi'''(y_0)\frac{\triangle_y^3}{3!} + \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Voor $\varphi(y_0)$ kan x_0 geschreven worden; wij vinden dan:

$$x = x_0 + \frac{\triangle_y}{f'_0} - \frac{f''}{f'}\frac{\triangle^2_y}{2!\,f'^2} + \frac{3f''^2 - f'f'''}{f'^2}\frac{\triangle^3_y}{3!\,f'^3} -$$

$$-\frac{f'^2 f^{IV} - 10f'f''f''' + 15f''^3}{f'^3}\frac{\triangle^4_y}{4!\,f'^4} + \ldots \quad \ldots (25)$$

Wanneer wij in plaats van $f(x) = y$ de vergelijking $f(x) = 0$ beschouwen, wordt blijkens (23) $\triangle_y = -y_0 = -f(x_0)$ en (24) wordt dan:

$$x = x_0 - \frac{f}{f'} - \frac{f''}{f'}\cdot\frac{f^2}{2!\,f'^2} - \left(\frac{3f''^2}{f'^2} - \frac{f'''}{f'}\right)\frac{f^3}{3!\,f'^3} -$$

$$-\left(\frac{f^{IV}}{f'} - 10\frac{f''f'''}{f'^2} + 15\frac{f''^3}{f'^3}\right)\frac{f^4}{4!\,f'^4} \ldots\ [1]) \quad \ldots (21)$$

Hier is formule (21) van blz. 62 door *implicite differentiatie* afgeleid.

---

[1]) Men moet er steeds aan denken, dat f, f', f'' enz. hier afkortingen zijn van $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ enz.

Beknopte formule.

De ontwikkelings-formule voor $f(x) = 0$ kan aldus worden geschreven: (zie 19):

$$x = x_0 + C_1\frac{-f_0}{1!} + C_2\frac{(-f)^2}{2!} + C_3\frac{(-f)^3}{3!} + C_4\frac{(-f)^4}{4!} + \ldots \text{[1]} \qquad (21)$$

Hierin is dan $C_1 = \frac{1}{f'}$; $C_2 = D\,.\,C_1 \times C_1 = \frac{D\,.\,C_1}{f'}$ [2];

$$C_3 = D\,.\,C_2 \times C_1 = \frac{D\,.\,C_2}{f'}; \quad C_4 = D\,.\,C_3 \times C_1 = \frac{D\,.\,C_3}{f'}.$$

In het algemeen is $C_k = DC_{k-1} \times C_1 = \frac{D\,.\,C_{k-1}}{f'}$.

Nu kan ook $C_1 = DC_0 \times C_1 = \frac{DC_0}{f'}$ gesteld worden, als $C_0 = x_0$ genomen wordt.

Het is dan licht in te zien, dat (21) aldus in beknopten vorm kan worden voorgesteld:

$$x = x_0 + \sum_1^\infty \frac{(-f_0)^k}{k!}\,\frac{D_0C_{k-1}}{f'_0}; \quad C_0 = x_0. \qquad \ldots (22)$$

Formule (22) stelt in beknopten vorm de geheele, tot in het oneindige voortgaande, omkeering van $f(x) = 0$ voor in de omgeving eener benaderde oplossing x_0.

Opmerking. Alle termen der ontwikkeling (zie 21) bevatten in den *noemer* f'. Hieruit kan worden afgeleid, dat ter berekening van x de aanvangswaarde x_0 zoo gekozen moet worden, dat deze dichter bij x gelegen is dan bij den dichtst nabij liggenden wortel van $f'(x) = 0$.

Transcendente vergelijkingen.

De formule (21) is zeer geschikt voor de oplossing door benadering van transcendente vergelijkingen.

Ie *Voorbeeld.* $x - \sin. x = 1$ of $x - \sin. x - 1 = 0$.

Men vindt gemakkelijk als benaderde oplossing:

$x_0 = 111° = 1.9373\ 155$ [3])

$\sin x_0 \qquad = 0.9335\ 804$

— ――――――――――

$x_0 - \sin. x_0 = 1.0037\ 351$ en dus $f_0 = 0.0037\ 351$.

---

[1]) Men moet er steeds aan denken, dat f, f', f'' enz. hier afkortingen zijn van $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ enz.

[2]) D is geen factor, maar een *operatie-teeken:* DC_1 beteekent $\frac{d}{dx}C_1$.

[3]) Zie bijv. Dr. B. Gonggrijp, Log. en gon. tafels en bijtafels blz. 145 en 146.

Nu is $f' = 1 - \cos. x_0 = 1.3583\ 679$; $f'' = \sin. x_0 = 0.9335\ 804$; $f''' = \cos. x_0 = -0.3583\ 679$; $f^{IV} = -\sin. x_0$ enz.

Bij logarithmische berekening in 7 decimalen vindt men:

$$\frac{f}{f'} = 0.0027\ 49697; \qquad \frac{f'' f^2}{2 f'^3} = 0.0000\ 0259\ 8208.$$

Het is gemakkelijk in te zien, dat voor nauwkeurigheid in 7 decimalen geen verdere termen in het 2e lid van (21) vereischt worden.

Men vindt dan:

$$x = x_0 - \frac{f}{f'} - \frac{f''}{f'} \cdot \frac{f^2}{2!\, f'^2} = 1.934\ 5632.$$

Wanneer men deze waarde weer in graden, minuten en sec. uitdrukt, vindt men $x = 1.934\ 5632 = 110°50'32''.25$ [1]).

Contrôle. $\sin. 110°50'32''.25 = 1.934\ 5631$ [2]).

IIe *Voorbeeld.* $x^x = 100.$

Omdat $3^3 = 27$ en $4^4 = 256$, zal er een positieve wortel gelegen zijn tusschen 3 en 4.

Men kan gemakkelijk nog een decimaal bepalen. Beschouwen wij bijv. $x \log. x = 2.$ (Brigg. log.).

Nu is $3.5 \log. 3.5 = 3.5 \times 0.544 \ldots. = 1.904 \ldots.;$

$3.6 \log. 3.6 = 3.6 \times 0.556 \ldots. = 2.0016 \ldots.$

$x_0 = 3.5$ is te klein, $x_0 = 3.6$ te groot; er zal echter een waarde van x dicht bij 3.6 gelegen zijn.

Wij kiezen dus $x_0 = 3.6$ en zullen den Neperiaanschen log. van beide leden der gegeven vergelijking nemen:

$$f(x) \equiv x \lg. x - \lg. 100 = 0 \text{ of}$$

$$f(x) \equiv x \lg. x - 4.60517\ 01859\ 88091.$$

Nu zal $f'(x) = 1 + \lg. x$; $f''(x) = \frac{1}{x}$; $f'''(x) = -\frac{1}{x^2}$; $f^{IV}(x) = \frac{2}{x^3}$ enz.

Verder is $\lg. 3.6 = 1.28093\ 38454\ 62064$; hieruit volgt:

$$x_0 \lg. x_0 = 3.6 \lg. 3.6 = 4.61136\ 18436\ 63430$$
$$\lg. 100 = 4.60517\ 01859\ 88019$$
$$-$$
$$f_0 = 0.00619\ 16576\ 75411;$$
$$f' = 2.28093\ 38454\ 62064;$$
$$f'' = \frac{1}{3.6}; \quad f''' = -\frac{1}{3.6^2} \text{ enz.}$$

---

[1]) Zie bijv. Dr. B. Gonggrijp, Log. en gon. tafels en bijtafels, blz. 145 en 146.

[2]) Zie bijv. Dr. B. Gonggrijp, Log. en gon. tafels en bijtafels en hiervan tafel IV.

Men ziet terstond in, dat de omkeerings-formule niet verder behoeft te worden voortgezet dan tot:

$$x = x_0 - \frac{f}{f'} - \frac{\frac{1}{3,6} f^2}{2 f'^3} \text{ of } x = x_0 - \frac{f}{f'} - \frac{f^2}{7.2 \,.\, f'^3}.$$

Logarithmisch (Brigg. in 7 dec.) blijkt

$$\frac{f}{f'} = 0.00271\ 4528$$

$$\frac{f^2}{7.2 f'^3} = 0.00000\ 0448\ 68 \ldots.$$

$$+ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$= 0.00271\ 4977.$$

Dus zal $x = x_0 - 0.00271\ 4977 = 3.59728\ 5023.$

Opmerking. Deze uitkomst moet tot op $\frac{1}{10^9}$ nauwkeurig zijn. In Crelle XII is deze vergelijking op geheel andere en veel uitvoerigere wijze behandeld door M. A. Stern, (blz. 25 sqq.). Hij geeft als uitkomst op: $x = 3.59728\ 5$; hij vermeld verder, dat *Euler* heeft afgeleid: $x = 3.59728\ 52$ in de Inst. Calc. diff., Bd. XXII, 1.—.

In plaats van door „probeeren" nog een eerste decimaal te bepalen nadat het aantal geheelen van x_0 gevonden is, kan men ook van de allereerste, ruwe, benadering $x_0 = 3$ of $= 4$ uitgaan en een eerste rekening met formule (21) in een beperkt aantal (bijv. 5) decimalen uitvoeren.

Nemen wij bijv. $x_0 = 4$; dan is lg. $x = 1.38629_4$;

$f_0 = 5.54518 - 4.60517 = 0.94001$; $\quad f' = 2.38629_4$; $\quad f'' = \frac{1}{4}$;

$f''' = -\frac{1}{16}$; $\quad f^{IV} = \frac{1}{32}$.

Nu wordt: $\frac{f}{f'} = 0.39393$;

$\frac{f'' f^2}{2 f'^3} = 0.00813$; de volgende termen worden: (zie form. 21).

$\ldots\ldots = 0.00060$

$\ldots\ldots = 0.00006$

$+ \overline{\qquad\qquad}$

$0.40232.$

Dus vindt men als benadering:

$$x = 4 - 0.40232 = 3.59728.$$

Deze waarde is reeds tot in de laatste decimaal juist. Als men haar als uitgang neemt voor een nieuwe toepassing van (21), blijkt het, dat men dan reeds volstaan kan met

$$x = x_0 - \frac{f}{f'}.$$

Men vindt dan de boven reeds opgegeven waarde

$$x = 3.59728\ 5023$$ terug.

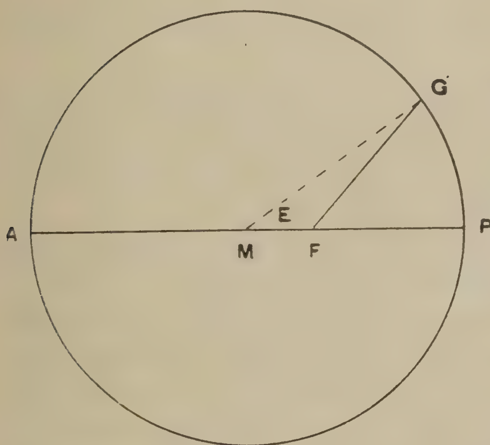
IV. DE KEPLER'SCHE VERGELIJKING.

$$E - e \sin. E = M.$$

Reeds meer dan 300 jaar geleden stelde Kepler het schijnbaar eenvoudige probleem op:

Uit een gegeven punt van de middellijn van een gegeven cirkel wenscht men naar den omtrek een rechte te trekken, die het oppervlak van den halven cirkel, waarin zij gelegen is, verdeelt in de verhouding $m : n$.

Hij was er in geslaagd de volledige oplossing der elliptische beweging der planeten om de zon tot bovengenoemd vraagstuk als kern te reduceeren.



Deze planimetrische kern is een zuivere tweelingzuster van de Kepler'sche (transcendente) vergelijking.

De laatste kan op de volgende wijze uit de eerste worden afgeleid. (Zie de fig.)

Zij F een gegeven punt van de middellijn AP van den gegeven (halven) cirkel AGP. Nu wordt verlangd FG zoo te trekken, dat

$$\text{Opp. PFG} : \text{Opp. AFG} = m : n.$$

Noem $\angle$ GMP = E. Nu is

$$\text{Opp. PFG} = \text{Opp. PMG} - \text{Opp. FMG} = \frac{E}{\pi} \times \frac{\pi R^2}{2} - \frac{1}{2} MF . R \sin. E =$$

$$= \tfrac{1}{2} R^2 . E - \tfrac{1}{2} R . MF \sin. E.$$

Verder zal

$$\text{Opp. AFG} = \text{Opp. AMG} + \text{Opp. FMG} = \frac{\pi - E}{\pi} \times \frac{\pi R^2}{2} + \frac{1}{2} MF . R \sin. E =$$

$$= \frac{\pi - E}{2} R^2 + \frac{1}{2} R . MF \sin. E.$$

Verlangd wordt dus:

$$\left(\frac{1}{2}R^2 . E - \frac{1}{2} R . MF \sin. E\right) : \left(\frac{\pi - E}{2} R^2 + \frac{1}{2} R . MF \sin. E\right) = m : n \quad \text{of}$$

$$\frac{\pi}{2} R^2 : (m+n) = (\tfrac{1}{2} R^2 . E - \tfrac{1}{2} R . MF \sin. E) : m, \quad \text{dus}$$

$$m\pi R^2 = (m+n) R^2 . E - (m+n) R . MF \sin. E.$$

Na deeling van beide leden door $(m+n)R^2$ komt er:

$$E - \frac{MF}{R} \sin. E = \frac{m}{m+n}\pi \quad \text{of}$$

$$E - e \sin. E = M.$$

Het is duidelijk, dat $0 \leqq e \leqq 1$ en $0 \leqq M \leqq \pi$.

Het planimetrische probleem en de transcendente vergelijking van Kepler komen beide neer op de bepaling van de „exentrische anomalie" E uit de „middelbare anomalie" M bij gegeven excentriciteit e.

Meetkundig en algebraïsch hebben vele groote wiskundigen hunne krachten aan Kepler's probleem beproefd.

Zuiver graphisch is het probleem niet (alleen met passer en lineaal) op te lossen. Wel gelukt dit, wanneer bepaalde kromme lijnen, zooals een sinusoide of cycloiden als zuiver te construeeren krommen worden toegelaten.

Reeds in 1659 schreef J. Wallis in zijn werk „De Cycloide" zijn artikel „de problemate Kepleriano per cycloidem solvendo." Hierin wordt het geometrische probleem, zooals het oorspronkelijk door Kepler gesteld was opgelost door middel eener „verkorte" [1]) cycloïde. De oplossing en het bewijs van de juistheid der constructie is zeer omslachtig. Algebraïsche toepassing voor de nauwkeurige oplossing van Kepler's vergelijking blijven achterwege.

Het ware nut van de graphische oplossing van het meetkundige probleem ligt echter in het *eenvoudig* en *spoedig* verschaffen van een *benaderde oplossing* van de *Kepler'sche vergelijking*, die daarna zoo *nauwkeurig* als men zelf verkiest kan *ontwikkeld* worden.

Spoed en *gemak* zijn de twee omstandigheden, waardoor zulk een *graphisch-analytische* methode de voorkeur verdient boven

---

[1]) De namen „verkorte" en „verlengde" cycloiden zijn dikwijls omgewisseld. Bij Wallis heet de door mij „verkort" genoemde cycloide juist de „protracta." Het komt mij echter voor, dat een cycloide, welker totale lengte *kleiner* is dan die der „zuivere" cycloide *verkort* genoemd moet worden.

de vele reeds voorgestelde oplossingen, ook boven de *beroemde* analytische *methode van* LAGRANGE.

Deze laatste moge hier eerst even toegelicht worden.

LAGRANGE'S omkeeringsformule geldt voor een algebraïsche of transcendente vergelijking, die in den vorm gebracht is:

$$x - \alpha\varphi(x) = x_0 \text{ of}$$

$$f(x) = \frac{x - x_0}{\varphi(x)} - \alpha = 0, \qquad \ldots\ldots (1)$$

waarin α een geringe waarde heeft en x_0 een benaderde oplossing voorstelt.

In een beperkt gebied van convergentie geldt dan de ontwikkelingsreeks:

$$x = x_0 + \sum_1^\infty \frac{\alpha^k}{k!} D_{x_0}^{k-1} \{\varphi(x_0)\}^k. \qquad \ldots\ldots (2)$$

De vergelijking van Kepler: $E - e \sin. E = M$ of

$$\frac{E - M}{\sin. E.} - e = 0 \qquad \ldots\ldots (3)$$

is als het ware pasklaar voor de toepassing van de reeks van LAGRANGE.

Deze geeft de zeer elegante uitkomst:

$$E = M + \sum_1^\infty \frac{e^k}{k!} D^{k-1}(\sin.^k M) \text{ [1]}. \qquad \ldots\ldots (4)$$

Hiermede schijnt Kepler's vergelijking voor goed en onverbeterlijk opgelost. Maar, — om deze oplossing voor becijfering aan te wenden moet men $\sin.^k M$ expliciet in sin. M. en in de sinussen van de veelvouden van M uitdrukken en daarna de differentiaties uitvoeren. Dan vindt men:

$$E = M + e \sin. M + \frac{e^2}{2} \sin. 2M + \frac{e^3}{8}(3 \sin. 3M - \sin. M) +$$

$$+ \frac{e^4}{6}(2 \sin. 4M - \sin. 2M) + \frac{e^5}{384}(125 \sin. M - 81 \sin. 3M + 2 \sin. M) + \ldots \quad (5)$$

Over de voorwaarde van convergentie dezer reeks

$$e < 0.662742 \ldots\ldots)$$

schreven o.a. LAPLACE en later STIELTJES.

De elegante formule (4) blijkt in de praktijk grooten omslag

---

[1]) In mijn verhandeling over nulpunten en oneindigheidspunten van 1908 komen verdere beschouwingen voor over de reeksen van LAPLACE en BÜRMANN.

te vereischen, vooral als e een vrij belangrijke waarde heeft, bijv. $e = 0.5$ . . . ., hetgeen bij de banen der z.g. kleine planeten dikwijls het geval is.

Om deze reden maakt men in de Astronomie dan ook weinig gebruik van de reeks van LAGRANGE; men zoekt liever òf door graphische middelen of door de methode der achtereenvolgende benaderingen een vrij nauwkeurige aanvangswaarde en brengt dan de noodige correctie aan door de *Newton'sche benadering* een- of *enkele malen* toe te passen.

De methode, die hier zal worden gegeven, gaat ook uit van een graphische of numerische aanvangswaarde, maar dan gevolgd door de in het vorige hoofdstuk behandelde *impliciete ontwikkeling* (of *uitbreiding* van de methode van Newton).

A. **Graphische Benaderingen.**

I. *De verkorte Cycloïde.*

In 1901 verscheen mijne graphische methode met behulp der verkorte Cycloïde in de Astronomische Nachrichten (Bd. 155, blz. 369). Eerst na deze methode ontwikkeld te hebben kwam Wallis' opstel te mijner kennis. Trouwens zijn meetkundige beschouwing is geheel iets anders dan mijn graphische oplossing der transcendente vergelijking. Deze is de volgende.

Men denke zich een cirkel met straal $M_0O = r$, die over de rechte basis OV rolt. Het punt O zal een zuivere cycloïde beschrijven; een punt P, op den afstand M_0P van het middelpunt M_0

gelegen, zal een verkorte cycloïde beschrijven, aangegeven door PP_1G.

Als nu O_1 een willekeurig punt van de *zuivere* cycloïde is, wanneer verder M_1 de plaats van het aan O_1 beantwoordende middelpunt [1]) en $\angle O_1M_1F = E$ de hoek van wenteling is ($M_1F \perp OV$), dan zal de abscis $OF = rE$ zijn.

Het punt P, dat de verkorte cycloïde beschrijft, zal gekomen zijn in P_1, op de lijn M_1O, zóó dat $M_1P_1 = M_0P = b$.

De abscis van P_1 zal zijn:

$$x = OF - KF = rE - b \sin. E. \qquad .\ .\ .\ .\ (6)$$

Vergelijken wij met (6) nu:

$$M = E - e \sin. E \quad \text{of} \quad Mr = rE - er \sin. E,$$

dan blijkt er volkomen overeenstemming tusschen beide vergelijkingen te bestaan, wanneer

$$b = er \quad \text{en} \quad x = Mr$$

genomen wordt.

Hieruit volgt als *graphische oplossing* der Kepler'sche vergelijking:

Men construeert de verkorte cycloïde, die beschreven wordt door een punt, dat gelegen is op den afstand er van het middelpunt van een over een rechte lijn rollenden cirkel met straal r. Op de abscis zet men de lengte $Mr = OK$ af en bepaalt het snijpunt P_1 van de ordinaat van K met de kromme. Uit P_1 als middelpunt beschrijft men een cirkel met $PM_0 = er$ als straal, die de rechte M_0M snijdt in M_1 en laat de ordinaat M_1F op de abscis neer. Dan is $\angle P_1M_1F$ de gevraagde hoek E.

Opmerking I. Men kan den straal van den rollenden cirkel (de generatrix) = 1 stellen; OK wordt dan = M. Wanneer OV en M_0M met een verdeeling in radialen of graden (of in beide!) voorzien worden, kan $E = OF = M_0M_1$ afgelezen worden. Wanneer men een teekening op millimeter-papier heeft, kunnen beide ordinaten KP_1 en FM_1 achterwege blijven.

Opmerking II. Zelfs de cirkel met P_1 als middelpunt en e als straal kan achterwege gelaten worden. Immers $P_1D = e \cos. E$ en $KP_1 = 1 - e \cos. E$; hieruit kan men E gemakkelijk bepalen. De aflezing van $1 - e \cos. E = KP_1$ is nog van groot belang

---

[1]) Dit middelpunt beschrijft de rechte M_0M.

omdat men daardoor behalve de excentrische anomalie ook den *voerstraal* ρ van de planeet vindt. Deze is n.l.

$\rho = a\,(1 - e \cos. E)$, ($a$ is de halve groote as),

zoodat men heeft:

$$\frac{\rho}{a} = y \text{ of } \frac{\rho}{a} = KP_1.$$

Ook de *ware anomalie v* kan door een eenvoudige constructie bepaald worden (zie fig. M_1O_1BA of MRSW).

Opmerking III. De gegeven graphische oplossing *schijnt* aan een groot bezwaar onderhevig te zijn, wanneer men tot numerische oplossing van de Kepler'sche vergelijking wenscht over te gaan. Daartoe moet namelijk een *verkorte cycloïde* vrij *nauwkeurig geconstrueerd* kunnen worden.

In het genoemde artikel van de Astronomische Nachrichten heb ik echter aangetoond, dat zulke krommen op *mechanische wijze* en zeer nauwkeurig kunnen worden geconstrueerd.

Ik heb verder aangegeven hoe een graphisch tableau voor het geheele planeten-systeem (dus voor veranderlijke waarden van e) kan worden ingericht, zoodat men door één blik op dat tableau de aan zekere gegeven waarde van M beantwoordende waarde van E, — en ook de andere grootheden, — kan aflezen.

Deze uiteenzettingen zouden echter te ver vallen buiten het kader der hoogere algebra. Wie er belang in stelt kan ze in genoemd artikel nagaan; misschien gaat een practicus eerstdaags het aangegeven idee verwezenlijken en daarmede een dienst bewijzen aan alle sterrekundige observatoria.

Wanneer een enkele aflezing E reeds in 3 min. [1]) nauwkeurig opleverde, zou een enkele Newton'sche correctie of liever de vroeger beschreven *uitbreiding* daarvan de grootheid terstond in *honderdsten* van *secunden* opleveren.

Zoolang echter het „tableau" nog geen werkelijkheid geworden is, kunnen beide volgende methoden dienst doen.

II. *De Sinusoïde.*

In de Astronomische Nachrichten, Bd. 69, blz. 177, heeft prof. Dubois de volgende graphische methode voorgesteld.

---

[1]) De implicite ontwikkeling kan reeds bij veel *geringere* nauwkeurigheid der aanvangswaarde het gewenschte resultaat leveren.

Als men in de vergelijking:

$$x - e \sin. x = M$$

stelt:

$$y = \sin. x, \qquad \ldots\ldots\ (7)$$

heeft men daarbij:

$$x - ey = M \qquad \ldots\ldots\ (8)$$

Nu is (7) de vergelijking eener *sinusoïde* en (8) die eener *rechte lijn*. Om x te vinden behoeft men slechts het snijpunt van (7) en (8) te bepalen *en daarvan de abscis af te lezen.*

Men zie Aanhangsel I.

Prof. Dubois stelde voor den hellingshoek van (8) en daarna de lijn uit het punt $x = M$ ($y = 0$) met dien geconstrueerden hellingshoek te trekken. Eenvoudiger komt het mij echter voor de lijn (8) te construeeren door de beide volgende punten te verbinden:

$$\left.\begin{matrix} y = 0 \\ x = M \end{matrix}\right\} \text{ en } \left.\begin{matrix} y = 1 \\ x = M + e \end{matrix}\right\}$$

Het eerste punt ligt op de X-as ($O\pi$), het tweede op de horizontale lijn $y = 1$ ($M\pi$).

In de figuur van Aanhangsel I moet M evenals e in absolute maat worden uitgedrukt.

1e *Voorbeeld:*

$$E - 0.3675224 \sin. E = 27°13'14''.72.$$

Nu is $M = 0.475\ 0918$ en $M + e = 0.842\ 6142$.

Korten wij M en $M + e$ tot in 3 decimalen in, dan wordt in de figuur OA = 47.5 mM. en MB = 84.3 mM. genomen. De lijn AB snijdt de sinusoïde in P. Als abscis van P lezen wij af 71.6 mM. en kiezen daarom $x = 0.716 = 41°$.

Opmerking I. De sinusoïde is hier geheel in absolute maat, d.w.z. ordinaten en abscissen zijn in den zelfden *maatstaf* geteekend. Bijv. bij $x = 30° = \frac{\pi}{6} = 0.52360$ (= 52.36 mM.) is $y = \sin. x = 0.50000$ (= 50 mM.).

Men kan ook elke mM. der abscissen-as een *graad* laten voorstellen; 10° wordt dan aangegeven door een abscis = 10 mM. enz. Dan wordt verder $y = \sin. 10° = 0.17453$ wel door een ordinaat = 17.453 mM. aangegeven. De ordinaten zijn dan alle gelijk aan

die in Aanhangsel I, maar de *abscissen zijn ingekort*, n.l. vermenigvuldigd met $\frac{180}{314.159\ldots}$.

Men moet dan om de lijn te construeeren, die de punten

$$\left.\begin{matrix} x = M \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \text{ en } \left.\begin{matrix} x = M + e \\ y = 1 \end{matrix}\right\}$$

verbindt [1]), e in *graden* enz. uitdrukken. Men vindt x dan onmiddellijk ook in graden enz.

2e *Voorbeeld.* **Zie Aanhangsel II.**

$$E - 0.197\ 4769 \text{ sin. } E = 131°41'18''.07.$$

Oplossing.

$$\begin{aligned} e &= \ \ 11°.3 \\ M &= 131°.7 \\ \hline M + e &= 143°. \end{aligned}$$

Men heeft dus de twee punten te verbinden:

$$\left.\begin{matrix} x = 131°.7 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \text{ en } \left.\begin{matrix} x = 143° \\ y = 1 \end{matrix}\right\} \text{ en vindt dan:}$$

$$x_0 = 139°.$$

Opmerking II. Men kan desverkiezende bij het aanbrengen van de lijn $x - e$ sin. $x = M$ altijd *links* van $M = 90°$ (dus in het eerste quadrant) blijven.

Is n.l. $M > 90°$, dan kan men stellen:

$$x = 180° - x' \text{ en } M = 180° - M'.$$

De verg. gaat dan over in:

$$180° - x' - e \text{ sin. } (180° - x') = 180° - M' \text{ of}$$
$$x' + e \text{ sin. } x' = M'.$$

Bij $y = $ sin. x' heeft men de rechte lijn bepaald door de punten:

$$\left.\begin{matrix} x' = M' \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \text{ en } \left.\begin{matrix} x' = M' - e \\ y' = 1 \end{matrix}\right\}.$$

Men vindt dan x' en behoeft nog slechts $x = 180° - x'$ te nemen.

3e *Voorbeeld.* **Zie Aanhangsel I.**

$$E - 0.413\ 2767 \text{ sin. } E = 126°47'7''.13.$$

$$\begin{aligned} M &= 2.212\ 8212 \\ e &= 0.413\ 2767 \\ \hline M + e &= 2.626\ 0979 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} M' &= 0.92877 \\ e &= 0.41328 \\ \hline M' - e &= 0.51549 \end{aligned}$$

---

[1]) De lijn $x - ey = M$ behoeft niet geconstrueerd te worden; men kan gewoon een lineaal langs de beide punten leggen en leest de abscis alleen af van het snijpunt van de lineaal met de sinusoïde.

Op de eerste manier krijgt men $E = 2.47 \ldots$ (Zie de lijn CQD); op de tweede vindt men $E' = 0.67 \ldots$ (Zie de lijn ERF).

Nu is $\pi - E' = 3.14 \ldots - 0.67 \ldots = 2.47 \ldots$

III. *Drie systemen rechte lijnen* [1]).

Stel in $\quad E - e \sin. E = M$

$x = e$ en $y = M$;

er ontstaat dan: $\quad E - x \sin. E = y$.

Op deze wijze ontstaan drie systemen van rechte lijnen.

In **Aanhangsel III** zijn de ordinaten in graden uitgedrukt en elke graad is voor de eenvoudigheid = 1 mM. genomen. Een abscis als $x = 0.193 \ldots$ (of $e = 0.193 \ldots$) is voorgesteld door 19.3 .... mM. enz. De lijnen $E - x \sin. E = y$ zijn als volgt geconstrueerd:

Als bijzondere punten zijn genomen:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = E \end{array}\right\} \text{ en } \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = E - \sin. E \end{array}\right\}.$$

De waarde $E - \sin. E$, op de lijn $x = 1$ af te zetten, is telkens weer in graden uitgedrukt om den *maatstaf* op deze lijn $x = 1$ precies even groot te laten zijn als op $x = 0$ (Y-as).

4e *Voorbeeld.*

$$E - 0.245\ 3162 \sin. E = 27°31'5''.23.$$

Zie **Aanhangsel III.**

Men zoekt het snijpunt van $x = 24.5$ mM. (// Y-as) en $y = 27°.5$ (// X-as). Dit blijkt te liggen tusschen de schuine lijnen, die bij $E = 35°$ en bij $E = 40°$ behooren. Op het oog valt nu ligt te schatten: $E_0 = 36°$.

Aanhangsel III geeft een zeer beknopt algemeen graphisch „tableau" van de oplossing der Kepler'sche vergelijking. Het laat echter geen scherpe interpolatie toe, zoodat het mij nog steeds wenschelijk voorkomt, dat het cycloïden-tableau tot stand gebracht wordt.

Opmerking. Het is hier wellicht de plaats om te laten zien, dat men geen waarden van $M > \pi$ in toepassing behoeft te brengen.

---

[1]) Deze methode is het eerst besproken door RADAU (Bulletin Astr. I 382 en XI 289).

Als n.l. $M > \pi$ was, zou men kunnen stellen:

$$M = 2\pi - M' \text{ en } E = 2\pi - E'.$$

Dan zou $$360° - E' + e \sin. E' = 360° - M'$$

of $$E' - e \sin. E' = M'.$$

De vergelijking is dan onmiddellijk herleid tot een andere van geheel denzelfden vorm, waarin het 2e lid $< \pi$ is.

B. **Numerische benaderingen.**

I. Uit $x = e \sin. x + M$ blijkt, dat bij kleine waarden van e, de grootheid x weinig van M zal verschillen.

Als eerste benadering kan men dan stellen:

$$x_1 = e \sin. M + M;$$

hierop kan men als verdere benadering laten volgen:

$$x_2 = e \sin. x_1 + M;$$

vervolgens $$x_3 = e \sin. x_2 + M \text{ enz.}$$

Door LAURENT is bewezen [1]), dat de waarden x_1, x_2 enz. werkelijk naar de waarde van x convergeeren, als $e < 1$.

5e *Voorbeeld.* (Zie 4e Voorbeeld.)

$$x - 0.245\ 3162 \sin. x = 27°31'5''.23.$$

Als, ter vereenvoudiging, $M = 27°31'$ gesteld wordt, vindt men

$$x_1 = 34°1', \quad x_2 = 35°23', \quad x_3 = 35°39'.$$

II. Voor een *eerste benadering* kan men bij betrekkelijk lage waarden van e ook wel 3 of 4 termen van de ontwikkelingsreeks van LAGRANGE nemen.

6e *Voorbeeld.* (Zie 1e Voorbeeld.)

$$x - 0.367\ 5224 \sin. x = 27°13'14''.7.$$

Hier is:

$$M = 0.47509$$
$$e \sin. M = 0.16811$$
$$\frac{e^2}{2} \sin. 2M = 0.05495$$
$$x_0 = 0.69915 = 40°4'.$$

N.B. Wij vonden vroeger graphisch met de sinusoïde

$$x_0 = 0.72 \ldots . = 41°.$$

---

1) Dit bewijs is o.a. te vinden in mijn verhandeling over „Nulpunten en Oneindigheidspunten" van 1908.

De benadering, welke 3 termen van LAGRANGE's ontwikkeling geven is van beteekenis minder nauwkeurig. De *volgende term:*

$$\frac{e^3}{8}(3 \sin. 3M - \sin. M)$$

geeft nog: 0.01558. Dit bedrag, gevoegd bij 0.69915 levert op:

$$x_0 = 0.71473 = 40°57'.$$

Bovengenoemde feiten zijn een sterke aanbeveling voor de graphische benaderings-methode.

III. *De Regula Falsi.*

Het eerste lid van:

$$x - e \sin. x - M = 0$$

wordt voor $x = M$ gelijk aan $-e \sin. M$ en
„ „ $x = M + e$ „ „ $e - e \sin. (M + e)$.

De eerste waarde is zeker negatief, omdat $0 \leqq M \leqq \pi$ en de tweede is beslist positief.

Er moet dus een wortel zijn tusschen M en $M + e$.

Als men de werkelijke waarde van den wortel $M + \delta$ noemt, stelt men volgens de regula falsi de evenredigheid op:

$$\delta : e = e \sin M : \{e - e \sin. (M + e) + e \sin. M\}.$$

(De toename van de functie wordt evenredig gesteld aan de toename van het argument.)

Hieruit volgt dan:

$$\delta = \frac{e \sin. M}{1 + \sin. M - \sin. (M + e)}$$

en dus
$$x_0 = M + \frac{e \sin. M}{1 + \sin. M - \sin. (M + e)} \quad \ldots\ldots (9)$$

of
$$x_0 = M + \frac{e \sin. M}{1 - 2 \cos. (M + \frac{1}{2}e) \sin. \frac{1}{2}e} \quad \ldots (10)$$

Bij kleine waarden van e zou ook kunnen:

$$x_0 = M + \frac{e \sin. M}{1 - e \cos. (M + \frac{1}{2}e)}.$$

6e *Voorbeeld.* (Zie 3e Voorbeeld)

$$x - 0.413\ 2767 \sin. x = 126°47'7''.13.$$

Berekening volgens (9) in 5 decimalen geeft:

$$x_0 = 2.46589.$$

Graphisch vonden wij vroeger: $E_0 = 2.47 \ldots.$

De, — voor zoover mij bekend is, — tot nu toe nog nimmer vertoonde en toegepaste eenvoudige formule (9) of (10) verdient als benaderingsformule verre de voorkeur boven de beroemde ontwikkeling van LAGRANGE.

IV. *De Methode van Gräffe.*

De algemeene oplossings-methode eener transcendente vergelijking werd op blz. 48 in § 10 besproken.

Het eerste lid wordt ontwikkeld naar opklimmende machten van het argument. Zonder eenig voorafgaand onderzoek wordt de bekende transformatie toegepast. De bewerking wordt met elke kolom zoover mogelijk voortgezet alvorens de rekening met een volgende te beginnen. De overgang van een term van zekere kolom in zijn quadraat geeft het einde der bewerking aan enz. Men voere de berekeningen in 5 decimalen uit om een eerste benadering der onbekende te bepalen. Het voortzetten der benadering kan dan door de in het vorige hoofdstuk geschetste impliciete ontwikkeling geschieden.

7e *Voorbeeld.* (Zie 4e Voorbeeld)

$$x - 0.245\ 3162 \sin. x = 27°31'5''.23.$$

Deze vergelijking is op blz. 50 met behulp der methode van Gräffe opgelost. Deze gaf, bij rekening in 5 decimalen als uitkomst $x_1 = 35°43'16''$.

Als aanvangsbenadering kiezen wij nu $x_0 = 35°43'$ om de berekeningen bij de voorzetting der benadering zoo eenvoudig mogelijk in te richten.

Graphisch met behulp van de 3 systemen rechte lijnen vonden wij vroeger reeds zeer *gemakkelijk* en *zeer vlug:* $x = 36°$.

Uit het voorafgegane onderzoek moet nu m.i. de volgende conclusie worden getrokken.

De voordeeligste methode voor de bepaling eener aanvangswaarde van „den" wortel der Kepler'sche vergelijking is de graphische methode met behulp van de sinusoïde of de 3 systemen rechte lijnen [1]) *of de numerische benadering door toepassing van de formule, die uit de* **regula falsi** *is afgeleid.*

---

[1]) Zoolang het cycloïden-tableau niet is verwezenlijkt!

Alle andere tot nu toe gebruikelijke methoden komen niet in vergelijking met de hier genoemde.

De methode van Gräffe bewijst hier hare algemeene toepasbaarheid, maar vereischt hier toevallig meer becijferingen dan de andere. Trouwens bij een vergelijking van eenvoudigen vorm zal in het algemeen het in rekening brengen van bijzondere eigenaardigheden tot een *afwijking* van de algemeene oplossing leiden.

C. **De voortzetting der benadering.**

Wij stellen:

$$f(x) \equiv x - e \sin. x - M = 0$$

en noemen

$$f = x_0 - e \sin. x_0 - M;$$

$$f' = 1 - e \cos. x_0; \; f'' = e \sin. x_0.$$

Toegepast zal nu worden formule (21) van hoofdstuk III:

$$x = x_0 - \frac{f}{f'} - \frac{f''f^2}{f'\,2!\,f'^2} \; \ldots\ldots$$

Bij het 1e *voorbeeld:*

$$x - 0.367\;5224 \sin. x = 27°13'14''.72$$

vonden wij vroeger graphisch (met de sinusoïde) $x_0 = 41°$. Dan wordt $f = -0.000\;6232$; $f' = 0.722\;6273$; $f'' = 0.241\;1164$.

Dus zal:

$$x = 0.715\;5850 + \frac{0.000\;6232}{0.722\;6273} - \frac{0.241\;1164 \times 0.000\;6232^2}{2 \times 0.722\;6273^3} \ldots\ldots$$

$$= 0.715\;5850 + 0.000\;8624\;1 - 0.000\;000\;1\;24 \ldots\ldots$$

$$= 0.716\;4473 = 41°2'57''.88.$$

Contrôle. $0.716\;4473 - e \sin. 0.716\;4473 - M =$

$0.716\;4473 - 0.716\;4473 = 0.000\;0000 \ldots\ldots$

Bij het *4e voorbeeld:*

$$x - 0.245\;3162 \sin. x = 27°31'5''.23$$

gaf de graphische methode $x_0 = 36°$ (3 systemen rechte lijnen) en de numerische door achtereenvolgende benaderingen $x_0 = 35°39'$. De voortzetting der benadering geeft hier bij $x_0 = 35°39'$:

$$x = 0.622\;2098 + 0.001\;31164 - 0.000\;0001\;54 \ldots\ldots =$$

$$= 0.623\;5213 = 35°43'30''.52.$$

Contrôle. Ook 0.623 5213 — e sin. 0.623 5213 — M is tot in de laatste decimaal = 0.000 0000 . . . .

Bij het 6e *Voorbeeld:*

$$x - 0.413\ 2767 \sin. x = 126°47'7''.13$$

gaf de **regula falsi** $x_0 = 2.46589$.

Wij kiezen $x_0 = 141°17'$.

De implicite ontwikkeling geeft dan:

$$x = x_0 + \frac{0.005\ 4538}{1.322\ 4585} - \frac{0.258\ 4920 \times 0.005\ 4538^2}{2 \times 1.322\ 4585^3} =$$

$$2.469\ 9817 = 141°31'10''.29.$$

In alle behandelde algebraïsche en transcendente vergelijkingen is het groote nut gebleken van de implicite ontwikkelingsformule. Bij geen der oplossingen zou Newton's benaderingsformule terstond een bruikbare benadering hebben verschaft; de andere geeft echter telkens een resultaat in 7 decimalen nauwkeurig door *twee correctie-termen.*

V. RECHTSTREEKSCH BEWIJS VAN DE GRONDSTELLING VAN DE THEORIE DER ALGEBRAÏSCHE VERGELIJKINGEN.

Ie Bewijs. In het navolgende bewijs worden eerst de coëfficienten alle reëel gedacht. Het geval van complexe coëfficienten wordt daarna tot het eerste herleid.

De te bewijzen stelling is:

Elke vergelijking van willekeurigen graad heeft minstens één (reëelen of complexen) wortel.

Wij nemen tot uitgangspunt de

Hulpstelling: Elke vergelijking van *oneven graad* (met reëele coëfficienten) heeft minstens één reëelen wortel.

De waarheid dezer hulpstelling blijkt zeer eenvoudig.

Men kan het eerste lid van zulk een vergelijking altijd *positief* maken door aan de onbekende een genoegzaam groote positieve waarde $+a$ te geven; maar het eerste lid kan ook altijd *negatief* gemaakt worden door aan de onbekende een negatieve waarde $-b$ toe te kennen, als de volstrekte waarde daarvan slechts groot genoeg genomen wordt.

Het eerste lid moet echter om van een positieve waarde naar een negatieve over te gaan (of omgekeerd) *zeker door nul gaan;* de vergelijking zal dus zeker een wortel hebben, gelegen tusschen $+a$ en $-b$.

De algemeene stelling behoeft dus slechts aangetoond te worden voor een vergelijking van *evenen* graad.

Wij zullen dus trachten aan te toonen, dat aan de vergelijking:

$$F(x) \equiv x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + A_2 x^{2n-2} + \ldots + A_{2n-1} x + A_{2n} = 0 \ldots \quad (1)$$

kan worden voldaan door een waarde van x, voor te stellen door:

$$x = u + iv. \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

In de laatste uitdrukkking stellen u en v reëele (positieve of negatieve) getallen voor; de uitdrukking is dus in het algemeen complex, maar kan voor $v = 0$ toch ook een reëelen wortel opleveren.

Nu is:

$$F(u+iv)=F(u)+ivF^{I}(u)-\frac{v^2}{1.2}F^{II}(u)-i\frac{v^3}{1.2.3}F^{III}(u)\ldots+\frac{(iv)^{2n}}{1..2n}\overset{(2n)}{F}(u)\,..\,(3)$$

Aan de vergelijking $F(u+iv)=0$ kan nu voldaan worden, wanneer tegelijkertijd

$$F(u)-\frac{v^2}{1.2}F^{II}(u)+\frac{v^4}{1.2.3.4}F^{IV}(u)-\frac{v^6}{1..6}F^{VI}(u)+\ldots\pm\frac{v^{2n}}{1..2n}\overset{(2n)}{F}(u)=0\,..\,(4)$$

en

$$F^{I}(u)-\frac{v^2}{1.2.3}F^{III}(u)+\frac{v^4}{1..5}F^{V}(u)-\frac{v^6}{1..7}F^{VII}(u)+\ldots$$

$$\ldots\mp\frac{v^{2n-2}}{1..(2n-1)}\overset{[2n-1]}{F}(u)=0\,.\,.\,.\,.\,(5)$$

De eerste leden van deze beide vergelijkingen zijn functies van v^2; wanneer een waarde $v=v_1$ voldoet, is er tevens een waarde $v=-v_1$. Hieruit volgt terstond, dat, wanneer een vergelijking van evenen graad (met reëele coëfficienten) een oplossing $x=u+iv$ heeft, zij daarnevens ook de oplossing $u-iv$ moet bezitten.

Wij vervangen nu v^2 door v' en brengen (4) en (5) in de volgende gedaante:

$$U_0v'^n+U_2v'^{n-1}+U_4v'^{n-2}+\ldots+U_{2n-2}v'+U_{2n}=0\quad\ldots\ldots(4a)$$

en

$$U_1v'^{n-1}+U_3v'^{n-2}+U_5v'^{n-3}+\ldots+U_{2n-3}v'+U_{2n-1}=0.\quad\ldots(5a)$$

Een enkele blik op (4) en (5) zal gemakkelijk doen inzien, dat in het algemeen U_k een functie van den k^{en} graad in u voorstelt.

Tusschen $4a$ en $5a$ zullen wij nu v' elimineeren door middel van de interessante *methode van Sylvester.*

Hiertoe wordt ($4a$) achtereenvolgens vermenigvuldigd (gedacht) met v'^{n-2}, v'^{n-3}, ... tot en met v'. Met ($4a$) zelf meegerekend ontstaan aldus $n-2+1=n-1$ vergelijkingen.

Verder wordt ($5a$) achtereenvolgens vermenigvuldigd (gedacht) met v'^{n-1}, v'^{n-2}, ... tot en met v'. Samen met ($5a$) ontstaan daardoor dan n vergelijkingen.

Te zamen zijn er dan $2n-1$ vergelijkingen, die allen *volledig*, afdalend, volgens v'^{2n-2}, $v'^{\,n-3}$ enz. worden gerangschikt. De *volledige* rangschikking vereischt, dat *alle* machten van v' (van v'^{2n-2} tot en met v') in alle vergelijkingen optreden; men behoeft daartoe slechts *nullen* als coëfficienten te nemen.

De eerste vergelijking van (5a) zou bijv. worden:

$$U_1 v'^{2n-2} + U_3 v'^{2n-3} + \ldots + U_{2n-1} v'^{n-1} + 0 . v'^{n-2} + \ldots\ldots + 0 = 0.$$

De volgende zou dan zijn:

$$0 . v'^{2n-2} + U_1 v'^{2n-3} + \ldots + U_{2n-2} v'^{n-1} + U_{2n-1} v'^{n-2} + 0 + \ldots + 0 = 0.$$

De laatste zou er aldus uitzien:

$$0 . v'^{2n-2} + 0 . v'^{2n-3} + \ldots + U_1 v'^{n-1} + U_3 v'^{n-2} + U_5 v'^{n-3} + \ldots + U_{2n-1} = 0.$$

De vergelijkingen, die uit (4a) ontstaan, zien er geheel analoog uit.

In het compleete stel van $2n - 1$ vergelijkingen zullen nu v'^{2n-2}, v'^{2n-3}, ... tot en met v' als *afzonderlijke* onbekenden worden beschouwd. Ten opzichte van deze $2n - 2$ onbekenden zijn de $2n - 1$ vergelijkingen *lineair*.

Hieruit volgt dan onmiddellijk, dat aan onderstaanden determinant voldaan zal moeten worden.

$$\begin{vmatrix}
U_1 & U_3 & \ldots\ldots & U_{2n-1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & U_1 & U_3 & \ldots\ldots & U_{2n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & U_1 & U_3 & \ldots\ldots\ldots & U_{2n-1} & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & U_{2n-1} \\
U_0 & U_2 & U_4 & \ldots\ldots & U_{2n} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & U_0 & U_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & U_{2n} & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & U_0 & U_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & U_{2n} & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & U_{2n}
\end{vmatrix} = 0.$$

Van deze vergelijking hebben wij slechts den *graad* noodig. Om dezen te bepalen behoeven wij slechts te bedenken, dat (5a) voor de eliminatie n vergelijkingen heeft moeten leveren en (4a) slechts $n - 1$ vergelijkingen. De diagonaal van den determinant bestaat dus uit n factoren U_1 en uit $n - 1$ factoren U_{2n}; dit geeft dus een vorm van den graad:

$$n + (n - 1)2n = 2n^2 - n = n(2n - 1).$$

Geen enkele andere term van den determinant kan dezen graad te boven gaan; een eenvoudige verificatie doet trouwens zien,

dat alle termen van *denzelfden* graad zijn; bijvoorbeeld: $U^n_{2n-1} \cdot U_0^{n-1}$ heeft den graad $n(2n - 1)$ enz. [1]).

Deze uitdrukking voor den graad der vergelijking in u schijnt op het eerste gezicht eenigszins ontmoedigend, omdat het onderzoek eener vergelijking van den $2n^{en}$ graad leidt tot een andere van den graad $n(2n - 1)$, die in het algemeen belangrijk hooger is dan de eerste.

Een enkele eenvoudige opmerking geeft hier echter onmiddellijk de oplossing van het probleem.

De factor $2n - 1$ van de uitdrukking $n(2n - 1)$ is altijd *oneven;* de factor n heeft altijd *een factor 2 minder* dan $2n$. Hetzelfde is het geval met den geheelen vorm $n(2n - 1)$.

Wanneer wij dus waren uitgegaan van een vergelijking in x, welker graad even was, maar slechts één enkelen factor 2 bezat, *zouden wij ter berekening van u. een vergelijking van oneven graad verkregen hebben*, zoodat het bestaan van een reëele waarde van u zeker aangetoond was. Uit (4a) zou verder het bestaan van een reëele waarde voor v^2 weer volgen. Aan (4a) en (5a) zou dus gezamenlijk kunnen worden voldaan, dus ook aan (4) en (5) en dientengevolge aan de vergelijking (van evenen graad) $F(x) = 0$.

Wij hebben dus reeds bewezen: Elke evene-machts-vergelijking, welker graad slechts één factor 2 bezit, heeft altijd minstens één wortel.

Hieruit volgt dan echter onmiddellijk, dat elke vergelijking, welker graad 2 factoren 2 bezit ook (minstens) een wortel moet hebben. Wanneer men n.l. $x = u + iv$ stelt, zal men ter berekening van u nog op een vergelijking stuiten, welker graad $n' = n(2n - 1)$ even is; die graad heeft echter slechts één factor 2. Door dus nog eens $u = u_1 + iv_1$ te stellen vindt men dan u_1 als oplossing van een vergelijking van *oneven* graad. Eveneens wordt v_1 uit een onevene-machts-vergelijking gevonden; de berekenbaarheid van u, dientengevolge die van v en ten slotte van x is dus weer aangetoond.

Op deze wijze voortgaande bewijst men de stelling voor een geheel willekeurige hoogere-machts-vergelijking, al moge de graad ook een maximum aantal factoren 2 bezitten.

---

[1]) Bij gewone, achtereenvolgende eliminatie van v'^n, v'^{n-1} enz. blijken de coëfficienten ook steeds gelijkslachtige veeltermen te blijven.

Men heeft in het algemeen te stellen:

$$\begin{aligned} x &= u + iv; \\ u &= u_1 + iv_1; \\ u_1 &= u_2 + iv_2; \\ &\ldots\ldots\ldots \\ u_{p-1} &= u_p + iv_p. \end{aligned}$$

Door deze uitdrukkingen op te tellen vindt men dan:

$$x = u_p + i(v + v_1 + v_2 + \ldots + v_p) = u_p + iV.$$

De waarde van u_p is *reëel;* boven merkten wij op, dat daarbij dan een *reëele* waarde van V^2 behoort. V zal weer òf reëel of zuiver-imaginair moeten zijn. Derhalve is bewezen:

Elke vergelijking van evenen graad heeft altijd een wortel, die òf reëel òf complex is.

Bij het voorafgaande betoog zijn de coëfficienten der beschouwde vergelijking steeds reëel ondersteld. Bij aanwezigheid van complexe coëfficienten behoeft men slechts te stellen: $x=p+qi$; om na substitutie het reëele en het imaginaire gedeelte van het eerste lid der vergelijking afzonderlijk $= 0$ te stellen. Door eliminatie van p of q ontstaat dan weer een vergelijking met reëele coëfficienten, zoodat men op het vorige geval teruggekomen is.

2de Bewijs. Men kan zich afvragen of aan de vergelijking:

$$x^{2n} + A_1x^{2n-1} + A_2x^{2n-2} + \ldots + A_{2n-1}x + A_{2n} = 0$$

ook kan worden voldaan door de wortels der *vierkants*-vergelijking:

$$x^2 - px - q = 0.$$

Wij kunnen daartoe stellen:

$$F(x) \equiv x^{2n} + A_1x^{2n-1} + A_2x^{2n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_{2n} =$$
$$= (x^2 - px - q)\,(x^{2n-2} + a_1x^{2n-3} + a_2x^{2n-4} + \ldots + a_{2n-3}x + a_{2n-2}).$$

Het is terstond duidelijk, dat dit mogelijk is, onder voorwaarde, dat aan onderstaande vergelijkingen kan worden voldaan:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 - p = A_1 \\ a_2 - a_1p - q = A_2 \\ a_3 - a_2p - a_1q = A_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{2n-2} - a_{2n-3}p - a_{2n-4}q = A_{2n-2} \\ -a_{2n-2}p - a_{2n-3}q = A_{2n-1} \\ -a_{2n-2}q = A_{2n} \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{of wel} \\ \text{(A)}\end{array} \left\{\begin{array}{l} a_1 = p + A_1 \\ a_2 = a_1p + A_2 + q \\ a_3 = a_2p + A_3 + a_1q \\ a_4 = a_3p + A_4 + a_2q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{2n-2} = a_{2n-3}p + A_{2n-2} + a_{2n-4}q \\ a_{2n-2}p + a_{2n-3}q + A_{2n-1} = 0 \\ a_{2n-2}q + A_{2n} = 0. \end{array}\right.$$

Het blijkt onmiddellijk, dat alle onbekenden a_1, a_2 enz. achtereenvolgens kunnen worden uitgedrukt in p en q en in de gegeven coëfficiënten A_1, $A_2 \ldots . A_{2n}$, zoodat men ten slotte twee verschillende vergelijkingen in p en q verkrijgt. Als het nu mogelijk blijkt aan deze beide laatste vergelijkingen te voldoen, zal het geheele systeem (A) oplosbaar zijn. Dan is de aanwezigheid van den factor $x^2 - px - q$ en derhalve het bestaan van twee wortels van de beschouwde vergelijking aangetoond.

De graad der opeenvolgende uitdrukkingen van a_1, a_2 enz. in p en q wordt opgegeven in onderstaand tafeltje:

graad van	a_1	a_2	a_3	a_4	....	a_{2n-3}	a_{2n-2}
in p	1	2	3	4	....	$2n-3$	$2n-2$
in q	0	1	1	2	....	$n-1$	$n-1$.

De beide laatste vergelijkingen van het systeem (A) zullen dus ten opzichte van q respectievelijk van den $n-1^{en}$ en den n^{en} graad zijn.

Zij kunnen worden voorgesteld door:

$$P_1 q^{n-1} + P_3 q^{n-2} + \ldots + P_{2n-3} q + P_{2n-1} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

en $$P_0 q^n + P_2 q^{n-1} + \ldots + P_{2n-2} q + P_{2n} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

(P_k is een polynoom in p van den k^{en} graad.)

De eliminatie van q geschiedt volgens de methode van Sylvester op precies dezelfde wijze als die van v' in het I^e bewijs.

De resulteerende vergelijking voor p wordt:

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_3 & \ldots\ldots & P_{2n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P_1 & P_3 & \ldots\ldots & P_{2n-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & P_1 & P_3 & \ldots\ldots & P_{2n-1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & & \ldots & P_{2n-1} \\ P_0 & P_2 & P_4 & \ldots\ldots & P_{2n} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P_0 & P_2 & P_4 & \ldots\ldots & P_{2n} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & P_0 & P_2 & P_4 & \ldots\ldots & P_{2n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & & \ldots & P_{2n} \end{vmatrix} = 0.$$

De graad van deze vergelijking zal weer $= n(2n-1)$ blijken te zijn, n.l. gelijk aan dien van een willekeurigen term er van. Omdat (6) in het geheel n vergelijkingen voor de eliminatie heeft

moeten leveren en (7) in het geheel $n - 1$ vergelijkingen, zal de diagonaal $= P^1_n P^{n-1}_{2n}$ zijn en dus van den graad

$$n + 2n(n - 1) = n(2n - 1)$$

zijn. Elk der overige termen zal van juist denzelfden graad zijn [1]).

Men ziet weer terstond, dat de graad van de resulteerende vergelijking een factor 2 minder heeft dan die der oorspronkelijke. Als de graad der oorspronkelijke vergelijking slechts één factor twee bezit, is de resultante in p van *oneven* graad; er bestaat dan een reëele waarde voor p. Uit (7) volgt dan eveneens een reëele waarde voor q. De *reëele* factor $x^2 - px - q$ van het eerste lid van $F(x) = 0$ is dan aanwezig en het bestaan van *twee* wortels van deze vergelijking van *evenen* graad is dan bewezen. Deze twee wortels kunnen reëel of complex zijn.

Wanneer de graad van $F(x) = 0$ *twee* factoren 2 bezit, zal de resultante in p nog een graad met één factor 2 hebben. Deze resultante heeft dan echter een deeler van den *tweeden* graad; er zijn dan twee waarden voor p. Door één er van te substit tueeren in (6) en (7) verkrijgt men twee vergelijkingen voor q, die op bekende wijze zoover men verkiest, — bijv. tot een vergelijking van den eersten graad, — te herleiden zijn. Er bestaat dus zeker weer een waarde voor q en derhalve weer een tweedemachts-deeler $x^2 - px - q$.

Op boven beschreven wijze kan men de stelling voor steeds grooter aantal factoren 2 in den graad aantoonen, zoodat zij *geheel algemeen* bewezen is.

Opmerking. Het valt zeer gemakkelijk te bewijzen, dat een vergelijking (met reëele coëfficienten), die een oplossing $x = u + iv$ heeft, ook een wortel $x = u - iv$ moet bezitten [2]). Zij zal dan in het eerste lid den factor

$$(x - u - iv)(x - u + iv) = x^2 - 2ux + u^2 + v^2,$$

dus een *reëelen* 2e machts-factor moeten bezitten.

Verificatie en Toepassing der gevonden resultaten.

Nemen wij tot voorbeeld de 4e machts-vergelijking:

$$x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4 = 0.$$

---

[1]) Zie de noot op blz. 86.

[2]) Zie het *I*e bewijs.

1^0. Wij stellen: $x = u + iv$.

Volgens de formules (4) en (5) zijn u en v gegeven door:

$$u^4 + A_1u^3 + A_2u^2 + A_3u + A_4 - v^2(6u^2 + 3A_1u + A_2) + v^4 = 0$$

en

$$4u^3 + 3A_1u^2 + 2A_2u + A_3 - v^2(4u + A_1) = 0.$$

De eliminatie van v^2 leidt tot een vergelijking van den 6en graad:

$$(4u+A_1)^2(u^4+A_1u^3+A_2u^2+A_3u+A_4)+(4u^3+3A_1u^2+2A_2u+A_3)^2 -$$
$$-(4u^3 + 3A_1u^2+2A_2u+A_3)(6u^2+3A_1u+A_2)(4u+A_1) = 0.$$

In het geval, dat $A_1 = 0$ is, gaat de laatste vergelijking over in:

$$u^6 + \frac{A_2}{2}u^4 + \frac{A_2^2 - 4A_4}{16}u^2 - \left(\frac{A_3}{8}\right)^2 = 0.$$

Deze is juist de hulpvergelijking van de *Euler'sche methode.*

2^0. Wij kunnen het eerste lid gelijk stellen aan:

$$(x^2 - px - q)(x^2 + a_1x + a_2).$$

Volgens de formules van het systeem (A) ontstaan dan:

$$(2p + A_1)q + p^3 + A_1p^2 + A_2p + A_3 = 0$$

en

$$q^2+(3p^2+2A_1p+A_2)q+p^4+A_1p^3+A_2p^2+A_3p+A_4=0.$$

De eliminatie van q voert tot de 6e machts-vergelijking:

$$(2p+A_1)^2(p^4+A_1p^3+A_2p^2+A_3p+A_4)+(p^3+A_1p^2+A_2p+A_3)^2 -$$
$$-(p^3+A_1p^2+A_2p+A_3)(3p^2+2A_1p+A_2)(2p+A_1)=0.$$

De graad $n(2n - 1)$ komt uit, want $2(4 - 1) = 6$.

Wanneer $A_1 = 0$ is, gaat de vergelijking over in:

$$p^6 + 2A_2p^4 + (A_2^2 - 4A_4)p^2 - A_3^2 = 0$$

d.w.z. juist in de *resolvente* van *Descartes.*

Afleiding der algemeene eindvergelijkingen bij het IIe bewijs.

Wij zullen ons bedienen van de *notatie:*

$$F_h(p) = p^h + A_1p^{h-1} + A_2p^{h-2} + \ldots + A_{h-1}p + A_h, \quad \ldots (8)$$

dus $F_{h+1}(p) = p^{h+1} + A_1p^h + A_2p^{h-1} + \ldots + A_hp + A_{h+1}, \quad \ldots (9)$

waaruit volgt:

$$F_{h+1}(p) = pF_h(p) + A_{h+1}. \quad \ldots \ldots (10)$$

Uit (10) kan men afleiden:

$$F'_{h+1}(p) = pF'_h(p) + F_h(p); \quad . \; . \; . \; . \; (11)$$

eveneens:

$$F'_h(p) = pF'_{h-1}(p) + F_{h-1}(p) \quad . \; . \; . \; . \; (12)$$

Uit (12) kan weer afgeleid worden:

$$F''_h(p) = pF''_{h-1}(p) + 2F'_{h-1}(p); \quad . \; . \; . \; . \; (13)$$

in het algemeen:

$$F_h^{[m]}(p) = pF_{h-1}^{[m]}(p) + mF_{h-1}^{[m-1]}(p) \quad . \; . \; . \; . \; (14)$$

Wij kunnen nu bewijzen, dat een willekeurige onbekende a_h van systeem (A) aldus kan worden voorgesteld:

$$a_h = F_h(p) + qF'_{h-1}(p) + \frac{q^2}{1.2}F''_{h-2}(p) + \frac{q^3}{1.2.3}F^{(3)}_{h-3}(p) + \dots$$

$$\dots + \frac{q^{\frac{h}{2}}}{1 \dots \frac{h}{2}} F_{\frac{h}{2}}^{\left(\frac{h}{2}\right)}(p) \quad . \; . \; . \; (15)$$

Deze formule heeft betrekking op het geval, dat h *even* is; wanneer h oneven is, zal de hoogste macht van q gelijk zijn aan $\frac{h-1}{2}$.

Om (15) te bewijzen zullen wij aantoonen, dat zij waar is voor a_{h+1}, wanneer zij geldt voor a_{h-1} en voor a_h.

Bij (15) voegen wij dus:

$$a_{h-1} = F_{h-1}(p) + qF'_{h-2}(p) + \frac{q^2}{1.2}F''_{h-3}(p) + \frac{q^3}{1.2.3}F^{(3)}_{h-4}(p) + \dots$$

$$\dots + \frac{q^{\frac{h-2}{2}}}{1 \dots \frac{h-2}{2}} F_{\frac{h}{2}}^{\left[\frac{h-2}{2}\right]}(p) \quad . \; . \; . \; (16)$$

Nu is volgens systeem (A):

$$a_{h+1} = pa_h + qa_{h-1} + A_{h+1}.$$

Dus wordt a_{h+1} gevonden door beide volgende uitdrukkingen samen te tellen:

$$A_{h+1} + pF_h(p) + pqF'_{h-1}(p) + p\frac{q^2}{1.2}F^{[2]}_{h-2}(p) + p\frac{q^3}{1.2.3}F^{[3]}(p) + \dots$$

$$\dots + p\frac{q^{\frac{h}{2}}}{1.2 \dots \frac{h}{2}} F_{\frac{h}{2}}^{\left[\frac{h}{2}\right]}(p).$$

$$qF_{h-1}(p) + q^2F'_{h-2}(p) + \frac{q^3}{1.2}F^{[2]}_{h-3}(p) + \dots + \frac{q^{\frac{h}{2}}}{1 \dots \frac{h-2}{2}} F_{\frac{h}{2}}^{\left[\frac{h-2}{2}\right]}(p).$$

De opvolgende termen der resulteerende formule zullen zijn:

$$A_{h+1} + pF_h(p) = F_{h+1}(p); \quad . \; . \; . \quad \text{(zie 10)}$$

$$q\{pF'_{h-1}(p) + F_{h-1}(p)\} = qF'_h(p); \quad . \; . \quad \text{(zie 12)}$$

$$\frac{q^2}{1.2}\{pF^{(2)}_{h-2}(p) + 2F'_{h-2}(p)\} = \frac{q^2}{1.2}F^{(2)}_{h-1}(p); \quad . \quad \text{(zie 13)}$$

. . . .

$$\frac{q^{\frac{h}{2}}}{1.2\ldots\frac{h}{2}}\left\{pF^{\left[\frac{h}{2}\right]}_{\frac{h}{2}}(p) + \frac{h}{2}F^{\left[\frac{h}{2}-1\right]}_{\frac{h}{2}}(p)\right\} = \frac{q^{\frac{h}{2}}}{1.2\ldots\frac{h}{2}}F^{\left[\frac{h}{2}\right]}_{\frac{h}{2}+1}(p); \quad \text{zie (14)}$$

Hieruit volgt:

$$a_{h+1} = F_{h+1}(p) + qF'_h(p) + \frac{q^2}{1.2}F^{(2)}_{h-1}(p) + \frac{q^3}{1.2.3}F^{[3]}_{h-2}(p) \;.\;.\;.\;.$$

$$.\;.\;.\;.\; + \frac{q^{\frac{h}{2}}}{1.2\ldots\frac{h}{2}}F^{\left[\frac{h}{2}\right]}_{\frac{h}{2}+1}(p),$$

d.w.z. juist hetgeen te bewijzen was.

Een eenvoudige verificatie bewijst terstond, dat de formule waar is voor $h = 1$ en $h = 2$; daaruit volgt dan de waarheid voor alle geheele waarden van h.

Wij hebben dus bijvoorbeeld:

$$a_{2n-3} = F_{2n-3}(p) + qF'_{2n-4}(p) + \frac{q^2}{1.2}F^{(2)}_{2n-2}(p) + \ldots + \frac{q^{n-2}}{1..(n-2)}F^{[n-2]}_{n-1}(p);$$

$$a_{2n-2} = F_{2n-2}(p) + qF'_{2n-3}(p) + \frac{q^2}{1.2}F^{(2)}_{2n-4}(p) + \ldots + \frac{q^{n-1}}{1..(n-1)}F^{[n-1]}_{n-1}(p).$$

Uit: $a_{2n-2}\,p + a_{2n-3}\,q + A_{2n-1} = 0$ (of $a_{2n-1} = 0$)

volgt:

$$F_{2n-1}(p) + qF'_{2n-2}(p) + \frac{q^2}{1.2}F^{(2)}_{2n-3}(p) + \ldots$$

$$.\;.\;.\;.\; + \frac{q^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{[n-1]}_{n}(p) = 0. \quad . \; . \quad (17)$$

Verder kan $a_{2n-2}q + A_{2n} = 0$

vervangen worden door:

$$qF_{2n-2}(p) + \frac{q^2}{1.2}F'_{2n-3}(p) + \frac{q^3}{1.2.3}F^{(2)}_{2n-4}(p) + \;.\;.\;.\;.$$

$$.\;.\;.\;.\; + \frac{q^n}{1\ldots(2n-1)}F^{[n-1]}_{n-1}(p) + A_{2n} = 0. \quad . \; . \quad (18)$$

Eindelijk geeft $p \times (17) + (18)$ ons de vergelijking:

$$F_{2n}(p) + qF'_{2n-1}(p) + \frac{q^2}{1 \,.\, 2} F^{(2)}_{2n-2}(p) + \ldots\ldots + \frac{q^n}{1 \,.\, 2 \ldots n} F^{[n]}_{n}(p) = 0, \quad . \quad . \quad (19)$$

die men onmiddellijk vinden kan door te bedenken, dat $a_{2n} = 0$. De eindvergelijkingen zijn volgens hetgeen voorafgaat (17) en (19). Zij geven rechtstreeks de bijzondere vergelijkingen, waardoor wij de hulpvergelijkingen van Descartes en Euler hebben afgeleid.

VI. NIEUWE RECHTSTREEKSCHE OPLOSSING VAN DE CUBISCHE VERGELIJKING.

De bekende oplossing van CARDANUS gaat uit van den bijzonderen vorm:

$$x^3 + px + q = 0.$$

De onderstaande methode neemt als uitgangspunt de vergelijking:

$$x^3 + 3Ax^2 + 3Bx + AB = 0. \quad \ldots\ldots (1)$$

De algemeene derde-machts-vergelijking is door een *lineaire substitutie* altijd tot bovenstaande gedaante te herleiden.

Zij de algemeene vergelijking bijvoorbeeld $y^3 + ay^2 + by + c = 0$. Door de substitutie $y = x + p$ ontstaat:

$$(x + p)^3 + a(x + p)^2 + b(x + p) + c = 0,$$

of $$x^3 + (3p + a)x^2 + (3p^2 + 2ap + b)x + p^3 + ap^2 + bp + c = 0.$$

Om den vorm (1) te krijgen moet nu:

$$(3p + a)(3p^2 + 2ap + b) = 9(p^3 + ap^2 + bp + c).$$

Bij uitwerking vallen de termen met p^3 en p^2 uit. Er blijft alleen over:

$$2(a^2 - 3b)p + ab - 9c = 0,$$

waaruit volgt:

$$p = \frac{9c - ab}{2(a^2 - 3b)}.$$

In (1) stellen wij nu:

$$x = \frac{1}{y} \pm \sqrt{B} \quad (+ \text{ of } - \text{ naar keuze}). \quad \ldots\ldots (2)$$

Er ontstaat dan (na verdrijving der breuken) een cubische vergelijking in y, waarin het *drievoud van den coëfficient van y gelijk is aan het quadraat van dien van y^2*, zoodat het eerste lid in den vorm $(y + \alpha)^3$ te brengen is.

De afleiding van die vergelijking is zeer eenvoudig:

$$x^3 = \left(\frac{1}{y} + \sqrt{B}\right)^3 = \frac{1}{y^3} + \frac{3\sqrt{B}}{y^2} + \frac{3B}{y} + B\sqrt{B}$$

$$3Ax^2 \qquad = \qquad \frac{3A}{y^2} + \frac{6A\sqrt{B}}{y} + 3AB$$

$$3Bx \qquad = \qquad \frac{3B}{y} + 3B\sqrt{B}$$

$$+\frac{AB}{} \qquad = \qquad \frac{AB}{}$$

$$0 \qquad = \frac{1}{y^3} + 3\frac{A+\sqrt{B}}{y^2} + \frac{6\sqrt{B}(A+\sqrt{B})}{y} + 4B(A+\sqrt{B})$$

of
$$y^3 + \frac{3}{2\sqrt{B}}y^2 + \frac{3}{4B}y + \frac{1}{4B(A+\sqrt{B})} = 0.$$

Hieruit volgt:

$$\left(y + \frac{1}{2\sqrt{B}}\right)^3 = \frac{1}{8B\sqrt{B}} - \frac{1}{4B(A+\sqrt{B})}$$

of
$$\left(y + \frac{1}{2\sqrt{B}}\right)^3 = \frac{1}{8B\sqrt{B}} \cdot \frac{A-\sqrt{B}}{A+\sqrt{B}}. \qquad \ldots\ldots \quad (3)$$

Deze betrekking geeft terstond drie waarden voor y:

1⁰. $y_1 + \frac{1}{2\sqrt{B}} = \frac{1}{2\sqrt{B}}\sqrt[3]{\frac{A-\sqrt{B}}{A+\sqrt{B}}}$ of $y_1 = \frac{1}{2\sqrt{B}}\left(-1 + \sqrt[3]{\frac{A-\sqrt{B}}{A+\sqrt{B}}}\right);$

2⁰. $y_2 + \frac{1}{2\sqrt{B}} = \frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}}{2\sqrt{B}}\sqrt[3]{\frac{A-\sqrt{B}}{A+\sqrt{B}}}$ of $y_2 = -\frac{1}{2\sqrt{B}} - \frac{1-i\sqrt{3}}{4\sqrt{B}}\sqrt[3]{\frac{A-\sqrt{B}}{A+\sqrt{B}}};$ (4)

3⁰. $y_3 = -\frac{1}{2\sqrt{B}} - \frac{1+i\sqrt{3}}{4\sqrt{B}}\sqrt[3]{\frac{A-\sqrt{B}}{A+\sqrt{B}}}.$

Uit (2) volgen dan de 3 waarden voor x.

Voorbeeld:

$$x^3 + 21x^2 - 93x + 103 = 0.$$

Stel $x = x' + p$ en neem $p = \frac{9 \times 103 + 21 \times 93}{2(441 + 3 \times 93)} = \frac{2880}{1440} = 2.$

$$x'^3 + (3p+21)x'^2 + (3p^2 + 42p - q3)x' + p^3 + 21p^2 - 93p + 103 = 0$$

gaat dan over in:

$$x'^3 + 27x'^2 + 3x' + 9 = 0.$$

Nu is $A = 9$ en $B = 1$.

Uit (4) volgt dan:

$$y_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9-1}{9+1}} = \sqrt[3]{0.1} \text{ of } y_1 = \sqrt[3]{0.1} - 0.5.$$

Met behulp van (2) heeft men dan:

$$x'_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{0.1} - 0.5} + 1, \text{ zoodat } x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{0.1} - 0.5} + 3.$$

Dus zal:

$$x_1 = \frac{3\sqrt[3]{0.1} - 0.5}{\sqrt[3]{0.1} - 0.5} = -\frac{3\sqrt[3]{0.1} - 0.5}{0.5 - \sqrt[3]{0.1}}. \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Verder is:

$$y_2 + \tfrac{1}{2} = -\frac{1 - i\sqrt{3}}{4}\sqrt[3]{\frac{8}{10}} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{0.1};$$

$$y_2 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\sqrt[3]{0.1} = -\frac{1 + (1 - i\sqrt{3})\sqrt[3]{0.1}}{2},$$

zoodat: $$x_2 = 3 - \frac{2}{1 + (1 - i\sqrt{3})\sqrt[3]{0.1}} = \frac{1 + 3(1 - i\sqrt{3})\sqrt[3]{0.1}}{1 + (1 - i\sqrt{3})\sqrt[3]{0.1}}. \quad . \quad (6)$$

Op dezelfde wijze blijkt:

$$x_3 = \frac{1 + 3(1 + i\sqrt{3})\sqrt[3]{0.1}}{1 + (1 + i\sqrt{3})\sqrt[3]{0.1}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Er is zeer veel voor om de algemeene 3e machts-vergelijking in den bijzonderen vorm (1) te brengen.

Vooreerst geldt ten opzichte van de bestaanbaarheid of onbestaanbaarheid der wortels de volgende, zeer eenvoudige,

Stelling. Is B positief, dan zijn twee worteis complex;
is B negatief, dan zijn alle drie wortels reëel;
is B = 0, dan zijn ook twee wortels = 0 en de derde reëel.

Bewijs. Het eerste deel dezer stelling volgt terstond uit de beschouwing van (4) en (2). De oplossing y_1 zal, als B positief is, reëel zijn en dientengevolge ook $x'_1 = \frac{1}{y_1} + \sqrt{B}$ en ten slotte x_1.

Zoowel y_2 als y_3 en dientengevolge weer x_1 en x_2 zullen echter complex zijn.

Het tweede deel der stelling blijkt door x achtereenvolgens gelijk te stellen aan 0, $-3A$, $+\sqrt{-3B}$ en $-\sqrt{-3B}$.

Dit geeft:

Voor $x = 0$ wordt de waarde van het 1e lid van (1) = $+AB$

„ $x = -3A$ „ „ „ „ „ „ „ „ =
„ $x = +\sqrt{-3B}$ „ „ „ „ „ „ „ „ = $\Big\}$ $-8AB$.
„ $x = -\sqrt{-3B}$ „ „ „ „ „ „ „ „ =

Er moet dus een reëele wortel liggen tusschen 0 en $+\sqrt{-3B}$ en ook tusschen 0 en $-\sqrt{-3B}$. Er zijn dus 2, maar dan ook 3 reëele

wortels. Van de beide eerste is de eene positief, de andere negatief, het teeken van den laatsten hangt af van dat van A.

Wij kunnen nu aan bovengenoemde stelling nog toevoegen de *Stelling:* Is B negatief, dan heeft (1) een reëelen wortel

a) tusschen 0 en $-3A$;

b) tusschen 0 en $+\sqrt{-3B}$;

c) tusschen 0 en $-\sqrt{-3B}$.

De gevallen *a* en *b* evenals de gevallen *a* en *c* *kunnen* denzelfden reëelen wortel aanduiden, maar de aanwezigheid van 3 reëele wortels volgt vast uit *b* en *c*.

Toepassing: $x^3 + 6x^2 + 11x + 11 = 0.$

Stel $x = x' + p$ en neem $p = \frac{9 \times 11 - 66}{2(36 - 33)} = \frac{33}{6} = 5.5.$

Verminder dus de wortels der gegeven vergelijking met 5.5 en *hiertoe eerst met 5.* Uit de coëfficientenrij

1 6 11 11

is terstond duidelijk, dat het teeken van 3B altijd positief zal blijven: de vergelijking heeft dus 2 onbestaanbare wortels. In het algemeen behoeft men slechts het aantal geheelen van *p* van de wortels af te trekken om terstond te kunnen zien, wat het teeken van 3B zal zijn.

Nieuwe Goniometrische Oplossing.

Aan de gedaante (1) sluit zich verder een zeer eenvoudige goniometrische oplossing aan:

Beschouwt men de formule:

$$\text{tg.}^3 x - 3\,\text{tg.}\,3x\,\text{tg.}^2 x - 3\,\text{tg.}\,x + \text{tg.}\,3x = 0 \quad \ldots \quad (8)$$

in verband met de algemeene cubische vergelijking:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

dan blijkt (8) identiek te zijn aan (9) op voorwaarde, dat men mag stellen:

$$a = -3\,\text{tg.}\,3x, \quad b = -3 \quad \text{en} \quad c = \text{tg.}\,3x \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Het gelijktijdig bestaan der 3 betrekkingen (10) vereischt, dat tegelijkertijd:

$$a = -3c \quad \text{en} \quad b = -3. \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Aan (11) wordt ook voldaan, wanneer tegelijkertijd

$$\frac{ab}{9} = c \quad \text{en} \quad b = -3. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

De eerste dezer beide betrekkingen is juist vervuld in onzen vorm (1); de tweede kan zeer gemakkelijk daaraan toegevoegd worden.

De goniometrische oplossing wordt dan deze:

Breng de algemeene cubische vergelijking in den vorm:

$$x^3 + 3Ax^2 + 3Bx + AB = 0.$$

Stel dan $x = py$, zoodat

$$y^3 + \frac{3A}{p}y^2 + \frac{3B}{p^2}y + \frac{AB}{p^3} = 0.$$

Stel $\frac{3B}{p^2} = -3$ en dus $p = \pm\sqrt{-B}$ (+ of — naar keuze).

De vergelijking in y wordt dan:

$$y^3 \pm \frac{3A}{\sqrt{-B}}y^2 - 3y \mp \frac{A}{\sqrt{-B}} = 0.$$

Stelt men nu $y = \text{tg.}\,y'$, dan volgt uit (8), dat:

$$\text{tg.}\,3y' = \mp\frac{A}{\sqrt{-B}},\ \text{zoodat}\ y' = \frac{1}{3}\,\text{bgtg.} \mp \frac{A}{\sqrt{-B}} \mp k \times 60^\circ$$

en ten slotte:

$$y = \text{tg.}\left\{\frac{1}{3}\,\text{bgtg.} \mp \frac{A}{\sqrt{-B}} \pm k \times 60^\circ\right\}. \quad . \quad . \quad . \ (13)$$

Men heeft voor x dan nog $x = py$, dus

$$x = \pm\sqrt{-B}\ \text{tg.}\left\{\frac{1}{3}\,\text{bgtg.} \mp \frac{A}{\sqrt{-B}} \pm k \times 60^\circ\right\}.$$

Uit (13) volgt terstond:

1°. dat deze oplossing geldt voor het geval, dat B negatief is, dus dat de 3 wortels reëel zijn en derhalve voor het z.g. *onherleidbare geval;*

2°. dat er 3, maar ook niet meer dan 3 reëele oplossingen gevonden worden. Als men het teeken in $\mp\frac{A}{\sqrt{-B}}$ zoo gekozen heeft, dat deze vorm en dus ook $\frac{1}{3}\,\text{bgtg.} \mp \frac{A}{\sqrt{-B}}$ positief is, heeft men naast $\text{tg.}\left(\frac{1}{3}\,\text{bgtg.} \mp \frac{A}{\sqrt{-B}}\right)$ nog de waarden:

$$\text{tg.}\left(\frac{1}{3}\,\text{bgtg.} \mp \frac{A}{\sqrt{-B}} + 60^\circ\right)\ \text{en}\ \text{tg.}\left(\frac{1}{3}\,\text{bgtg.} \mp \frac{A}{\sqrt{-B}} + 120^\circ\right).$$

Alle andere oplossingen zijn tot een van deze drie te herleiden.

Voorbeeld:

$$x^3 - 30x^2 + 96x - 48 = 0.$$

Stel

$$x = x' + p,$$

zoodat

$$x'^3 + (3p - 30)x'^2 + (3p^2 - 60p + 96)x' + p^3 - 30p^2 + 96p - 48 = 0$$

$$p = \frac{9c - ab}{2(a^2 - 3b)} = \frac{-9 \times 48 + 30 \times 96}{2(900 - 288)} = 2;$$

$$x'^3 - 24x'^2 - 12x' + 32 = 0.$$

Nu is dus $\quad A = -8 \;$ en $\; B = -4.$

De oplossing is:

$$x_1 = 2 + 2 \operatorname{tg.} \left\{ \tfrac{1}{3} \operatorname{bgtg.} 4 \right\};$$

$$x_2 = 2 + 2 \operatorname{tg.} \left\{ \tfrac{1}{3} \operatorname{bgtg.} 4 + 60^\circ \right\};$$

$$x_3 = 2 + 2 \operatorname{tg.} \left\{ \tfrac{1}{3} \operatorname{bgtg.} 4 + 120^\circ \right\}.$$

Dit geeft:

$$x_1 = 2.9463035; \quad x_2 = 26.43746; \quad x_3 = 0.616232.$$

Contrôle. De som der gevonden wortel is 29.99999 (55); deze ligt zeer nabij de gegeven waarde: 30.00000 00.

VII. ONDERZOEK VAN DE RECHTSTREEKSCHE OPLOSBAARHEID VAN HOOGERE-MACHTS-VERGELIJKINGEN DOOR MIDDEL VAN DETERMINANTEN.

Stelling. De eliminatie van z tusschen $G(z) = 0$ en $H(z) = y$ levert altijd een resultante $R(y) = 0$, die van denzelfden graad is als $G(z) = 0$.

$G(z)$ en $H(z)$ stellen geheele functies van z voor, waarvan alleen $G(z)$ van eindigen graad behoeft te zijn.

Het bewijs is eenvoudig. De nieuwe onbekende is een *één-waardige* functie van z; voor elk der wortels van $G(z) = 0$ kan y dus slechts een enkele waarde hebben. $R(y) = 0$ kan dus slechts n wortels hebben, als $G(z) = 0$ die heeft en moet dus met $G(z) = 0$ van denzelfden graad zijn.

Opmerking. Men kan de stelling uitbreiden tot:

De eliminatie van z tusschen $G(z) = 0$ en $y = \frac{T(z)}{N(z)}$ moet een resultante opleveren $R(y) = 0$, die van denzelfden graad zal zijn als $G(z) = 0$.

Toepassing. Combineert men:

$$z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_{n-1} z + A_n = 0$$

met $$z^{n-1} + B_1 z^{n-2} + \dots + B_{n-2} z + B_{n-1} = y,$$

(of in het algemeen met $z^{n-p} + B_1 z^{n-p-1} + \dots + B_{n-p-1} z + B_{n-p} = y$) dan zal $R(y) = 0$ van den n^{en} graad zijn.

De coëfficienten van $R(y) = 0$ kan men beschouwen als functies van de, voorloopig onbepaald gelaten, $n - 1$ grootheden B_1, $B_2, \dots B_{n-1}$.

Men kan nu trachten over $B_1, B_2, \dots B_{n-1}$ zoodanig te beschikken, dat de coëfficienten van $y^{n-1}, y^{n-2}, \dots y$ alle $= 0$ worden. Hiertoe heeft men $n - 1$ vergelijkingen met evenveel onbekenden op te lossen. Daarna zou men dan y vinden uit een *binomische* vergelijking van den n^{en} graad en ten slotte ter be-

rekening van z een vergelijking van den $n-1^{en}$ graad overhouden. De oplossing eener vergelijking van den n^{en} graad zou op deze wijze teruggebracht worden tot die eener vergelijking van den $n-1^{en}$ graad.

Werkelijk gelukt deze methode bij vergelijkingen van den tweeden, derden en vierden graad.

I. De vierkantsvergelijking.

De resultante der eliminatie van z tusschen

$$z^2 + A_1 z + A_2 = 0 \text{ en}$$
$$z + B_1 - y = 0 \quad \text{is}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & A_1 & A_2 \\ 1 & (B_1 - y) & 0 \\ 0 & 1 & (B_1 - y) \end{vmatrix} = 0 \text{ of } (B_1 - y)^2 - A_1(B_1 - y) + A_2 = 0.$$

Uitgewerkt, wordt zij:

$$y^2 - (2B_1 - A_1)y + B_1{}^2 - A_1 B_1 + A_2 = 0.$$

Men heeft nu te stellen:

$$2B_1 - A_1 = 0 \text{ of } B_1 = \frac{A_1}{2}.$$

Voor y vindt men de binomische vergelijking:

$$y^2 = \frac{A_1{}^2}{4} - A_2, \text{ dus } y = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{A_1{}^2 - 4A_2}.$$

Uit $z + B_1 - y = 0$ volgt dan:

$$z = -\frac{A_1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{A_1{}^2 - 4A_2}.$$

II. De derde-machts-vergelijking.

Bij $$z^3 + A_1 z^2 + A_2 z + A_3 = 0$$
en $$z^2 + B_1 z + B_2 - y = 0$$
behoort als resultante:

$$\begin{vmatrix} 1 & A_1 & A_2 & A_3 & 0 \\ 0 & 1 & A_1 & A_2 & A_3 \\ 1 & B_1 & (B_2 - y) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & B_1 & (B_2 - y) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & B_1 & (B_2 - y) \end{vmatrix} = 0.$$

Het is met een oogopslag duidelijk, dat bij uitwerking y^2 een coëfficient zal hebben, die in B_1 en B_2 *lineair* is, terwijl de coëfficient van y een *quadratische* functie zal zijn van B_1 en B_2. Men kan dus door oplossing eener *vierkantsvergelijking* de termen met y^2 en y doen verdwijnen en dus y oplossen uit een binomische vergelijking $y^3 = C$.

III. De vierde-machts-vergelijking.

De resultante der eliminatie van z tusschen

$$z^4 + A_1 z^3 + A_2 z^2 + A_3 z + A_4 = 0$$

en

$$z^3 + B_1 z^2 + B_2 z + (B_3 - y) = 0$$

is de onderstaande determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 1 & B_1 & B_2 & (B_3 - y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & B_1 & B_2 & (B_3 - y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & B_1 & B_2 & (B_3 - y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & B_1 & B_2 & (B_3 - y) \end{vmatrix} = 0.$$

Wilde men hier nu de coëfficienten van y^3, y^2 en $y = 0$ maken, dan zou men voor B_1, B_2 en B_3 drie vergelijkingen hebben op te lossen, die respectievelijk van den 1en, 2en en 3en graad zijn. Zulk een stelsel zou in het algemeen tot de oplossing eener vergelijking van den 6en graad voeren.

Men kan de methode echter nog blijven toepassen, als men slechts verlangt, dat in $R(y) = 0$ de termen met y^3 en y zullen ontbreken, zoodat $R(y) = 0$ en aldus zal uitzien:

$$y^4 + C_2 y^2 + C_4 = 0$$

en nog als een *vierkantsvergelijking* kan worden opgelost.

Er behoeven dan ook slechts 2 onbekende coëfficienten te worden ingevoerd, waardoor nog een vereenvoudiging bereikt wordt.

Bij $$z^4 + A_1 z^3 + A_2 z^2 + A_3 z + A_4 = 0$$

neme men dan:

$$z^2 + B_1 z + (B_2 - y) = 0.$$

De resultante wordt:

$$\begin{vmatrix} 1 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 \\ 0 & 1 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 1 & B_1 & (B_2-y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & B_1 & (B_2-y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & B_1 & (B_2-y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & B_1 & (B_2-y) \end{vmatrix} = 0.$$

De coëfficient van y^3 zal weer in B_1 en B_2 lineair zijn, die van y is van die grootheden een functie van den 3en graad. B_1 en B_2 zijn dus te berekenen en derhalve is de vergelijking van den 4en graad rechtstreeks op te lossen.

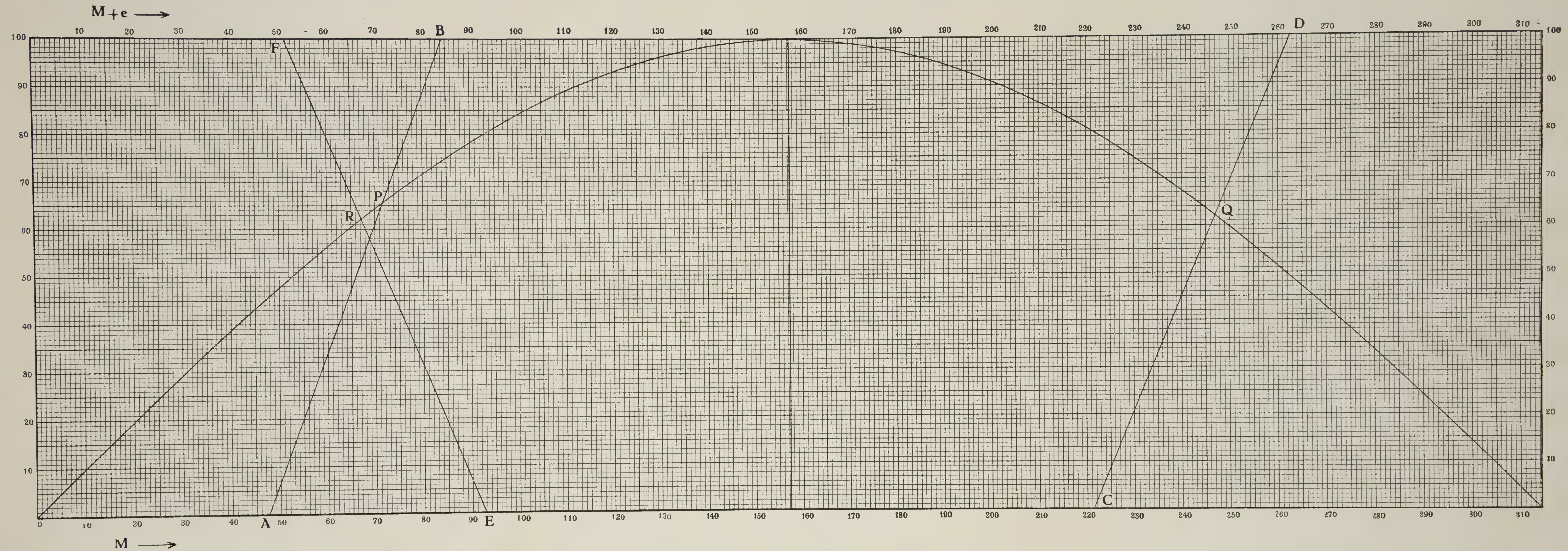
Bij de **vijfde-machts-vergelijking,** — en ook bij vergelijkingen van hoogeren graad, — blijft de methode in gebreke. Geen wonder: reeds door ABEL is bewezen, dat de rechtstreeksche oplossing van vergelijkingen van den vijfden en hoogeren graad in het algemeen **onmogelijk** is.

Het komt mij voor, dat dit feit met meer vertrouwen door een beoefenaar van de hoogere algebra zal worden aanvaard na lezing van boven gegeven algemeene beschouwing over oplosbaarheid. Abel's bewijs is verre van elementair en in alle, mij bekende, leerboeken wordt tot nu toe zijn stelling steeds plotseling zonder eenig bewijs gememoreerd nadat de zeer bijzondere methoden van Cardanus, Euler en Descartes zijn vertoond.

Aanhangsel A.

GRAFIEK DER SINUSOIDE

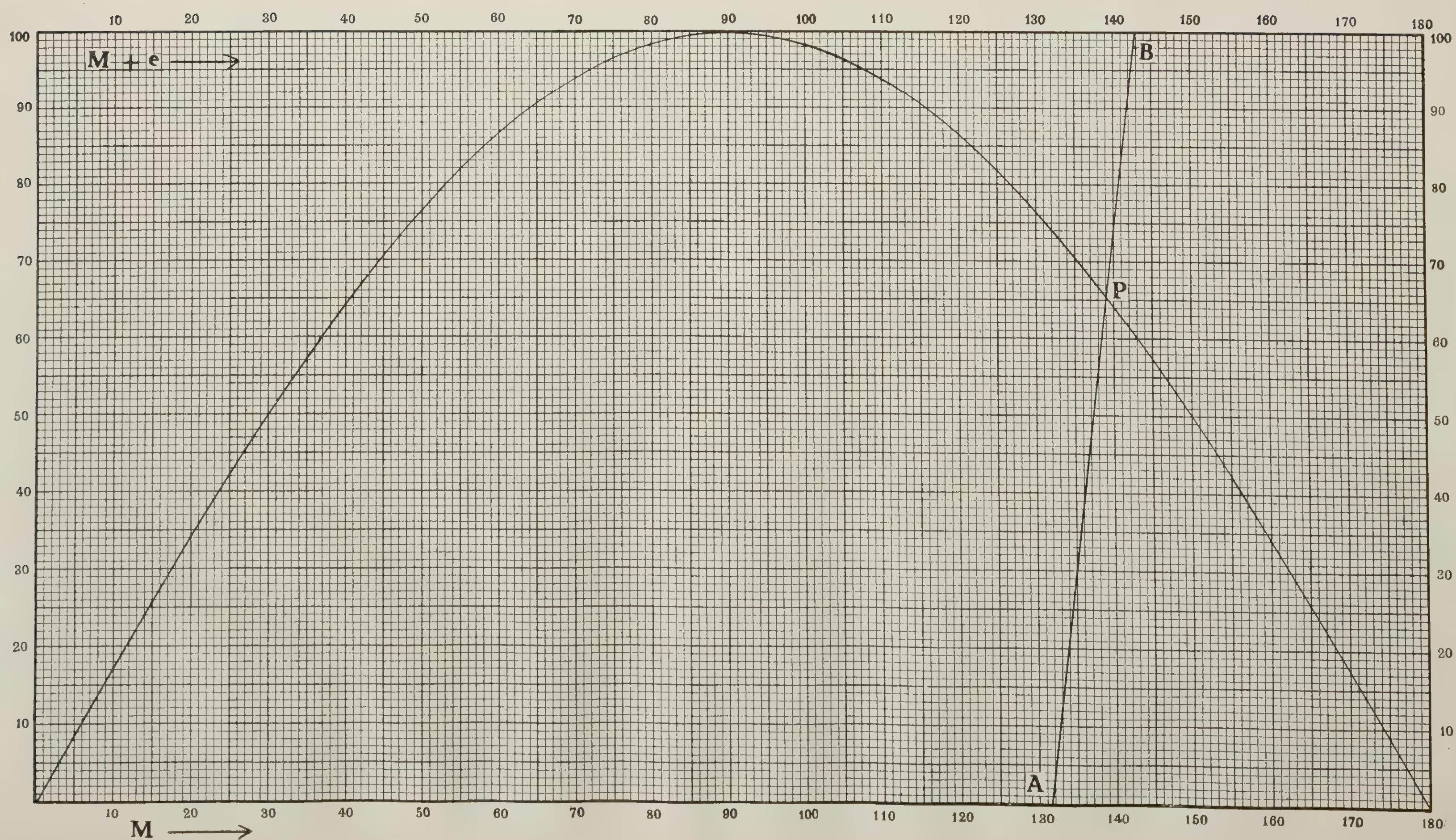
ter (benaderde) graphische oplossing van de Kepler'sche Vergelijking.



Aanhangsel B.

GEWIJZIGDE SINUSOIDE

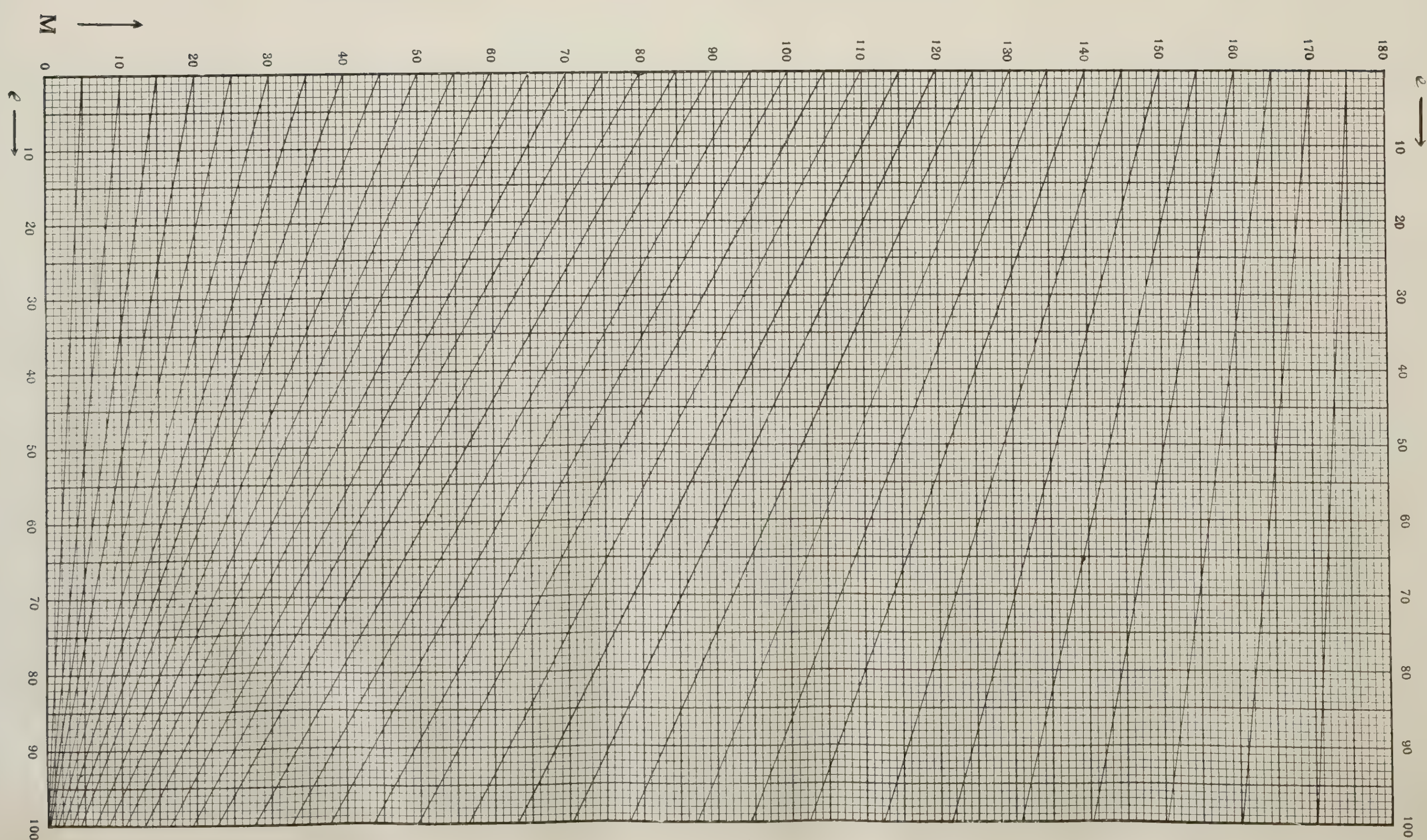
ter (benaderde) graphische oplossing van de Kepler'sche Vergelijking.

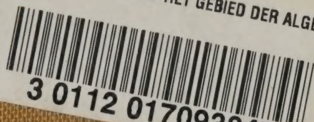


Aanhangsel C.

DRIE SYSTEMEN RECHTE LIJNEN

ter (benaderde) graphische oplossing van de Kepler'sche Vergelijking.




UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
512G58N
C001
NIEUWE METHODEN OP HET GEBIED DER ALGEBR
3 0112 017093847